Zwei

Configurationen von Punkten,

welche sich aus fünf resp. sechs beliebigen Punkten eines Kegelschnittes ergeben.

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei

hoher philosophischer Facultät zu Marburg

eingereicht von

Fritz Rathke,
aus Langenberg.

Marburg.
Universitäts-Buchdruckerei (R. Friedrich).
1885.

Seinen lieben Eltern

aus Dankbarkeit.

Der Verfasser.

Lebenslauf.

Geboren wurde ich, Fritz Rathke, evangelischer Confession, Sohn des Betriebs-Secretairs Wilhelm Rathke und der Barbara, geb. Bourg, am 15. October 1860 zu Langenberg, Kreis Mettmann. Im Jahre 1861 wurde mein Vater nach Elberfeld versetzt. Hier besuchte ich von meinem sechsten Jahre an die Elementarschule und wurde Herbst 1869 in die Vorschule der hiesigen Realschule I. O. aufgenommen. Herbst 1879 wurde ich von derselben mit dem Zeugnisse der Reife entlassen. Ich widmete mich darauf seit dem October desselben Jahres an der Hochschule zu Berlin dem Studium der Mathematik, Physik und beschreibenden Naturwissenschaften. Das Studium der letzteren gab ich nach einigen Semestern auf, um neuere Sprachen zu nehmen. Die letzten beiden Semester verbrachte ich in Münster. Während meines akademischen Quadrienniums waren meine Lehrer die Herren:

Ascherson, Bruns, Harms, Helmholtz, Kiepert, Kirchhoff, Kummer, Lepsius, v. Martens, Paulsen, Schwendener, v. Treitschke, Wangerin, Weierstrass, Zeller in Berlin,

Deiters, Hittorf, Körting, Salkowski, Spicker, Sturm in Münster.

Allen diesen meinen hochverehrten Herren Lehrern meinen besten Dank. Insbesondere fühle ich mich jedoch Herrn Professor Sturm in Münster für die mannigfache Anregung, die mir von ihm zu Teil geworden ist, zu Dank verpflichtet.

I.

In dem Aufsatze in Crelle's Journal Bd. XXX., S. 273—276, (Steiner's gesammelte Werke, Bd. II., S. 346): „Aufgaben und Lehrsätze", stellt Steiner in Aufgabe 4 eine Betrachtung über „fünf beliebige Punkte in der Ebene" an. Vorliegende Arbeit hat den Zweck, die von ihm unbewiesen gelassenen Behauptungen zu beweisen, wobei sich dann weitere Resultate ergeben werden.

Fünf beliebige Punkte in der Ebene: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 *(a, b, c, d, e)** bilden verbunden ein vollständiges Fünfeck mit

$$\frac{5.4}{2} = 10$$

Seiten. Wir wollen dieselben mit *t (G)* bezeichnen. Je zwei dieser Seiten schneiden sich in einem Punkte, der entweder Ecke oder Diagonalpunkt ist. Scheidet man die Ecken auf einer Seite aus, so bleiben drei übrig. Die Seiten des durch sie gebildeten Dreiecks schneiden die ausgeschiedene jede in einem Diagonalpunkte. Da man jede Seite ausscheiden kann, so erhält man

$$3.\frac{5.4}{2}$$

Diagonalpunkte. Von diesen liegt aber jeder auf zwei Seiten, mithin ist ihre wirkliche Anzahl

$$\frac{3}{2}.\frac{5.4}{2} = 15.$$

---

*) Es soll in dieser Arbeit eine der jetzt üblichen Bezeichnungsweise mehr entsprechende Bezeichnung gewählt werden; jedoch wird überall da, wo eine Abweichung von Steiner's Bezeichnung stattfindet, dieselbe in Klammern hinzugefügt werden.

Die 15 Punkte mögen $R(r)$ heissen. Durch diese 15 Punkte R lassen sich

$$\frac{15.\,14}{2} = 105$$

Geraden legen, von welchen aber, da je 3 R auf jeder Seite t liegen, auch je 3 mit jeder Seite t zusammenfallen. Es bleiben also

$$105 - 3.\ 10 = 75$$

Geraden übrig. Diese können nun wieder in zwei Gruppen unterschieden werden, je nach dem Punktepaare, durch welches sie gehen.

Die fünf Fundamentalpunkte A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 bestimmen zu je vier genommen fünf vollständige Vierecke, deren Diagonalpunkte obige 15 R sind. Die Diagonalpunkte jedes einzelnen dieser Vierecke sind Punkte, deren Lage nur von den vier Fundamentalpunkten abhängig ist, die das Viereck bilden. Es sind folglich die drei Verbindungslinien derselben Linien, die durch ein Punktepaar bestimmt sind, das nur von vier Fundamentalpunkten abhängt. Da jedes der fünf vollständigen Vierecke drei solche Geraden liefert, so existieren deren

$$5.\ 3 = 15.$$

Sie sollen mit $r(L)$ bezeichnet werden. Es bleiben somit 60 Geraden übrig, die $h(H)$ heissen mögen. Dieselben gehen durch zwei Diagonalpunkte R zweier verschiedener vollständiger Vierecke, und da deren Ecken alle fünf Fundamentalpunkte umfassen, so hängt das Punktepaar, welches jede Gerade bestimmt, auch von allen fünf Fundamentalpunkten ab.

Dass es nur 60 h giebt, ist leicht nachzuweisen. Jeder Punkt R lässt sich mit 12 Punkten R verbinden, die nicht zu demselben vollständigen Vierecke mit ihm gehören. Es gäbe also

$$15.\ 12$$

Geraden. Dieselben sind aber doppelt gezählt, ausserdem fallen 30 mit den Seiten t zusammen, so dass nur wirklich $\frac{15.\,12}{2} - 30 = 60$ existieren.

Von diesen 75 Geraden, $15\,r$ und $60\,h$, gehen durch jeden Punkt R zwei, respective acht. Das Letztere erkennt man

leicht, wenn man sich erinnert, dass auf jeder Seite t drei Punkte R liegen. Wählen wir nun einen Punkt R, so liegt derselbe mit je einem Paar Punkte R auf jeder der beiden ihn bildenden Seiten t. Es fallen somit mit jeder dieser beiden Seiten t zwei Geraden, die beiden Verbindungsgeraden des gewählten Punktes mit je einem Punkte des auf ihr liegenden Paares, zusammen. Diese vier Geraden sind von jeden 12 oben erwähnten Geraden abzuziehen, so dass durch jeden Punkt R nur acht Geraden h gehen. Dasselbe ergiebt sich auch aus der Tabelle p. 13. Man ersieht dort, dass jeder Punkt R mit acht andern verbunden ist.

II.

Vom vollständigen Viereck gilt der Satz: „Jedes Paar Gegenseiten und die Verbindungslinien des von ihm gebildeten Diagonalpunktes mit den beiden übrigen Diagonalpunkten bilden eine Gruppe von vier harmonischen Strahlen." Greift man nun zwei vollständige Vierecke heraus, etwa:

$$A_1\ A_2\ A_3\ A_4 \text{ und } A_1\ A_2\ A_3\ A_5,$$

so sind die Diagonalpunkte des ersten:

$$R_{12,34},\ R_{13,24},\ R_{14,23},$$

die des zweiten:

$$R_{12,35},\ R_{13,25},\ R_{15,23}.$$

Das Paar jeder Colonne liegt auf derselben Seite t, z. B. $R_{12,34}$ und $R_{12,35}$ liegen auf t_{12}, denn sie sind die Schnittpunkte von t_{12} mit t_{34}, resp. t_{35}. Nach obigem Satze sind nun, wenn wir, da die Verbindungslinie zweier Punkte R eines vollständigen Vierecks Polare des dritten Diagonalpunktes desselben Vierecks ist, diese Verbindungslinien mit r und dem Index des zugehörigen dritten Punktes R bezeichnen:

$$t_{12},\ t_{34},\ r_{13,24},\ r_{14,23}$$

und

$$t_{12},\ t_{35},\ r_{13,25},\ r_{15,23}$$

zwei Gruppen von vier harmonischen Strahlen, weil bei der ersten Gruppe:

$(t_{12}\, t_{34}) \equiv R_{12,34}$, $r_{13,24} \equiv (R_{12,34}\, R_{14,23})$, $r_{14,23} \equiv (R_{12,34}\, R_{13,24})$
und bei der zweiten:
$(t_{12}\, t_{35}) \equiv R_{12,35}$, $r_{13,52} \equiv (R_{12,35}\, R_{15,23})$, $r_{15,23} \equiv (R_{12,35}\, R_{13,25})$
als Identitäten bestehen.

Beide Gruppen haben den Strahl t_{12} gemeinsam, mithin liegen die Schnittpunkte der drei anderen Paare auf einer Geraden. Die Schnittpunkte sind, wenn wir bedenken, dass $(t_{34}\, t_{35}) \equiv A_3$ ist:

$$A_3, (r_{13,24}\, r_{13,25}), (r_{14,23}\, r_{15,23});$$

die Gerade geht also durch A_3.

Ebenso erhalten wir zu den Punkten jeder der beiden andern Colonnen je ein Paar Gruppen von vier harmonischen Strahlen, nämlich zu Colonne 2:

$$\begin{cases} t_{13}, t_{24}, r_{12,34}, r_{14,23} \\ t_{13}, t_{25}, r_{12,35}, r_{15,23} \end{cases}$$

und zu Colonne 3:

$$\begin{cases} t_{14}, t_{23}, r_{12,34}, r_{13,24} \\ t_{15}, t_{23}, r_{12,35}, r_{13,25}. \end{cases}$$

Die gemeinsamen Strahlen sind beziehungsweise t_{13} und t_{23} und die Orte der Schnittpunkte der jedesmaligen drei andern Paare, wenn wir wiederum $(t_{24}\, t_{25}) \equiv A_2$ und $(t_{14}\, t_{15}) \equiv A_1$ setzen:

$A_2, (r_{12,34}\, r_{12,35}), (r_{14,23}\, r_{15,23})$ durch A_2,
resp. $A_1, (r_{12,34}\, r_{12,35}), (r_{13,24}\, r_{13,25})$ durch A_1.

Die Punkte A_1, A_2, A_3 sind aber die drei Fundamentalpunkte, die beiden vollständigen Vierecken gemeinsam sind. In gleicher Weise ergiebt jedes Paar Vierecke drei Geraden durch die dem Paare gemeinsamen drei Fundamentalpunkte, und da wir die fünf vollständigen Vierecke zehnmal paaren können, ergeben sich $3.\ 10 = 30$ Geraden.

Folgende Tabelle giebt eine Uebersicht über ihre Entstehung und ihre Zugehörigkeit zu den einzelnen Paaren von Vierecken.

Vierecke.	Gruppen harm. Strahlen.	Gem. Strahlen.	Resultierende Gerade.
	$t_{12}, t_{34}, r_{13,24}, r_{14,23}$ $t_{12}, t_{35}, r_{13,25}, r_{15,23}$	t_{12}	$A_3, (r_{13,24}\, r_{13,25}), \quad (r_{14,23}\, r_{15,23})$.
$A_1\, A_2\, A_3\, A_4$ $A_1\, A_2\, A_3\, A_5$	$t_{13}, t_{24}, r_{12,34}, r_{14,23}$ $t_{13}, t_{25}, r_{12,35}, r_{15,23}$	t_{13}	$A_2, (r_{12,34}\, r_{12,35}), \quad (r_{14,23}\, r_{15,23})$.
	$t_{14}, t_{23}, r_{12,34}, r_{13,24}$ $t_{15}, t_{23}, r_{12,35}, r_{13,25}$	t_{23}	$A_1, (r_{12,34}\, r_{12,35}), \quad (r_{13,24}\, r_{13,25})$.
	$t_{12}, t_{34}, r_{13,24}, r_{14,23}$ $t_{12}, t_{45}, r_{15,24}, r_{14,25}$	t_{12}	$A_4, (r_{13,24}\, r_{15,24}), \quad (r_{14,23}\, r_{14,25})$.
$A_1\, A_2\, A_3\, A_4$ $A_1\, A_2\, A_4\, A_5$	$t_{13}, t_{24}, r_{12,34}, r_{14,23}$ $t_{15}, t_{24}, r_{12,45}, r_{14,25}$	t_{24}	$A_1, (r_{12,34}\, r_{12,45}), \quad (r_{14,23}\, r_{14,25})$.
	$t_{14}, t_{23}, r_{12,34}, r_{13,24}$ $t_{14}, t_{25}, r_{12,45}, r_{15,24}$	t_{14}	$A_2, (r_{12,34}\, r_{12,45}), \quad (r_{13,24}\, r_{15,24})$.
	$t_{12}, t_{34}, r_{13,24}, r_{14,23}$ $t_{15}, t_{34}, r_{13,45}, r_{14,35}$	t_{34}	$A_1, (r_{13,24}\, r_{13,45}), \quad (r_{14,23}\, r_{14,35})$.
$A_1\, A_2\, A_3\, A_4$ $A_1\, A_3\, A_4\, A_5$	$t_{13}, t_{24}, r_{12,34}, r_{14,23}$ $t_{13}, t_{45}, r_{15,34}, r_{14,35}$	t_{13}	$A_4, (r_{12,34}\, r_{15,34}), \quad (r_{14,23} r_{14,35})$.
	$t_{14}, t_{23}, r_{12,34}, r_{13,24}$ $t_{14}, t_{35}, r_{15,34}, r_{13,45}$	t_{14}	$A_3, (r_{12,34}\, r_{15,34}), \quad (r_{13,24}\, r_{13,45})$.
	$t_{12}, t_{34}, r_{13,24}, r_{14,23}$ $t_{25}, t_{34}, r_{24,35}, r_{23,45}$	t_{34}	$A_2, (r_{13,24}\, r_{24,35}), \quad (r_{14,23}\, r_{23,45})$.
$A_1\, A_2\, A_3\, A_4$ $A_2\, A_3\, A_4\, A_5$	$t_{13}, t_{24}, r_{12,34}, r_{14,23}$ $t_{35}, t_{24}, r_{25,34}, r_{23,45}$	t_{24}	$A_3, (r_{12,34}\, r_{25,34}), \quad (r_{14,23}\, r_{23,45})$.
	$t_{14}, t_{23}, r_{12,34}, r_{13,24}$ $t_{45}, t_{23}, r_{25,34}, r_{24,35}$	t_{23}	$A_4, (r_{12,34}\, r_{25,34}), \quad (r_{13,24}\, r_{24,35})$.
	$t_{12}, t_{35}, r_{13,25}, r_{15,23}$ $t_{12}, t_{45}, r_{14,25}, r_{15,24}$	t_{12}	$A_5, (r_{13,25}\, r_{14,25}), \quad (r_{15,23}\, r_{15\,24})$.
$A_1\, A_2\, A_3\, A_5$ $A_1\, A_2\, A_4\, A_5$	$t_{13}, t_{25}, r_{12,35}, r_{15,23}$ $t_{14}, t_{25}, r_{12,45}, r_{15,24}$	t_{25}	$A_1, (r_{12,35}\, r_{12,45}), \quad (r_{15,23}\, r_{15,24})$.
	$t_{15}, t_{23}, r_{12,35}, r_{13,25}$ $t_{15}, t_{24}, r_{12,45}, r_{14,25}$	t_{15}	$A_2, (r_{12,35}\, r_{12,45}), \quad (r_{13,25}\, r_{14,25})$.

Vierecke.	Gruppen harm. Strahlen.	Gem. Strahlen.	Resultierende Gerade.
	$t_{12}, t_{35}, r_{13,25}, r_{15,23}$ $t_{14}, t_{35}, r_{13,45}, r_{15,34}$	t_{35}	$A_1, (r_{13,25}\, r_{13,45}), \quad (r_{15,23}\, r_{15,34})$.
$A_1\ A_2\ A_3\ A_5$ $A_1\ A_3\ A_4\ A_5$	$t_{13}, t_{25}, r_{12,35}, r_{15,23}$ $t_{13}, t_{45}, r_{14,35}, r_{15,34}$	t_{13}	$A_5, (r_{12,35}\, r_{14,35}), \quad (r_{15,23}\, r_{15,34})$.
	$t_{15}, t_{23}, r_{12,35}, r_{13,25}$ $t_{15}, t_{34}, r_{14,35}, r_{13,45}$	t_{15}	$A_3, (r_{12,35}\, r_{14,35}), \quad (r_{13,25}\, r_{13,45})$.
	$t_{12}, t_{35}, r_{13,25}, r_{15,23}$ $t_{24}, t_{35}, r_{25,34}, r_{23,45}$	t_{35}	$A_2, (r_{13,25}\, r_{25,34}), \quad (r_{15,23}\, r_{23,45})$.
$A_1\ A_2\ A_3\ A_5$ $A_2\ A_3\ A_4\ A_5$	$t_{13}, t_{25}, r_{12,35}, r_{15,23}$ $t_{34}, t_{25}, r_{24,35}, r_{23,45}$	t_{25}	$A_3, (r_{12,35}\, r_{24,35}), \quad (r_{15,23}\, r_{23,45})$.
	$t_{15}, t_{23}, r_{12,35}, r_{13,25}$ $t_{45}, t_{23}, r_{24,35}, r_{25,34}$	t_{23}	$A_5, (r_{12,35}\, r_{24,35}), \quad (r_{13,25}\, r_{25,34})$.
	$t_{12}, t_{45}, r_{14,25}, r_{15,24}$ $t_{13}, t_{45}, r_{14,35}, r_{15,34}$	t_{45}	$A_1, (r_{14,25}\, r_{14,35}), \quad (r_{15,24}\, r_{15,34})$.
$A_1\ A_2\ A_4\ A_5$ $A_1\ A_3\ A_4\ A_5$	$t_{14}, t_{25}, r_{12,45}, r_{15,24}$ $t_{14}, t_{35}, r_{13,45}, r_{15,34}$	t_{14}	$A_5, (r_{12,45}\, r_{13,45}), \quad (r_{15,24}\, r_{15,34})$.
	$t_{15}, t_{24}, r_{12,45}, r_{14,25}$ $t_{15}, t_{34}, r_{13\,45}, r_{14,35}$	t_{15}	$A_4, (r_{12,45}\, r_{13,45}), \quad (r_{14,25}\, r_{14,35})$.
	$t_{12}, t_{45}, r_{14,25}, r_{15,24}$ $t_{23}, t_{45}, r_{25,34}, r_{24,35}$	t_{45}	$A_2, (r_{14,25}\, r_{25,34}), \quad (r_{15,24}\, r_{24,35})$.
$A_1\ A_2\ A_4\ A_5$ $A_2\ A_3\ A_4\ A_5$	$t_{14}, t_{25}, r_{12,45}, r_{15,24}$ $t_{34}, t_{25}, r_{23,45}, r_{24,35}$	t_{25}	$A_4, (r_{12,45}\, r_{23,45}), \quad (r_{15,24}\, r_{24,35})$.
	$t_{15}, t_{24}, r_{12,45}, r_{14,25}$ $t_{35}, t_{24}, r_{23,45}, r_{25,34}$	t_{24}	$A_5, (r_{12,45}\, r_{23,45}), \quad (r_{14,25}\, r_{25,34})$.
	$t_{13}, t_{45}, r_{14,35}, r_{15,34}$ $t_{23}, t_{45}, r_{24,35}, r_{25,34}$	t_{45}	$A_3, (r_{14,35}\, r_{24,35}), \quad (r_{15,34}\, r_{25,34})$.
$A_1\ A_3\ A_4\ A_5$ $A_2\ A_3\ A_4\ A_5$	$t_{14}, t_{35}, r_{13,45}, r_{15,34}$ $t_{24}, t_{35}, r_{23,45}, r_{25,34}$	t_{35}	$A_4, (r_{13,45}\, r_{23,45}), \quad (r_{15,34}\, r_{25,34})$.
	$t_{15}, t_{34}, r_{13,45}, r_{14,35}$ $t_{25}, t_{34}, r_{23,45}, r_{24,35}$	t_{34}	$A_5, (r_{13,45}\, r_{23,45}), \quad (r_{14,35}\, r_{24,35})$.

Man ersieht aus der Tabelle, dass durch jeden der fünf Fundamentalpunkte sechs Geraden gehen. Dieses ist aber nur scheinbar; in Wirklichkeit fallen jede sechs Geraden, die zu demselben Fundamentalpunkte gehören, in eine zusammen.

Ein bekannter Satz der Polaren-Theorie lautet: „Die Polaren der Punkte einer Geraden in Bezug auf denselben Kegelschnitt drehen sich um einen Punkt, den Pol dieser Geraden."

Es sind aber z. B.:

$$r_{12,34}, r_{12,35}, r_{12,45}$$

die respectiven Polaren der Punkte:

$$R_{12,34}, R_{12,35}, R_{12,45}$$

in Bezug auf den Kegelschnitt der Fundamentalpunkte, und diese Punkte liegen auf der Seite t_{12}; denn sie sind die Schnittpunkte von t_{12} mit resp. t_{34}, t_{35}, t_{45}. Nach dem angeführten Satze schneiden sich also obige 3 r in einem Punkte, dem Pole von t_{12}. Nennt man nun diesen Pol T_{12}, so dass

$$T_{12} \equiv (r_{12,34}\, r_{12,35}) \equiv (r_{12,34}\, r_{12,45}) \equiv (r_{12,35}\, r_{12,45})$$

ist, und führt diese Bezeichnung allgemein ein, so sind die sechs Geraden durch A_1 nach der Tabelle:

1) Z. 3. $A_1\, T_{12}\, T_{13}$, 4) Z. 14. $A_1\, T_{12}\, T_{15}$
2) Z. 5. $A_1\, T_{12}\, T_{14}$, 5) Z. 16. $A_1\, T_{13}\, T_{15}$
3) Z. 7. $A_1\, T_{13}\, T_{14}$, 6) Z. 22. $A_1\, T_{14}\, T_{15}$

Von diesen sechs Geraden fallen zunächst 1), 2) und 4) zusammen, weil sie zwei Punkte, A_1 und T_{12}, gemeinsam haben. Auf dieser Geraden liegen also die Punkte: A_1, T_{12}, T_{13}, T_{14}, T_{15}, und daher fallen auch 3), 5) und 6) mit ihr zusammen; 3) und 5), weil sie die Punkte A_1 und T_{13}, 6), weil sie die Punkte A_1 und T_{14} gemeinsam haben. Es fallen also alle sechs Geraden in eine zusammen und auf ihr liegen vier Punkte T, die Pole der in der Ecke A_1 zusammentreffenden Seiten t in Bezug auf den Fundamental-Kegelschnitt. Dasselbe gilt von jeden sechs Geraden durch einen Fundamentalpunkt. Geben wir den Geraden den Index des betreffenden Fundamentalpunktes und nennen sie a *(A, B, C, D, E)*, so liegen auf den Geraden folgende Punkte $T(t)$, auf:

a_1: $T_{12}, T_{13}, T_{14}, T_{15}$;
a_2: $T_{12}, T_{23}, T_{24}, T_{25}$;
a_3: $T_{13}, T_{23}, T_{34}, T_{35}$;
a_4: $T_{14}, T_{24}, T_{34}, T_{45}$;
a_5: $T_{15}, T_{25}, T_{35}, T_{45}$.

Man ersieht hieraus, dass jeder Punkt T zwei Geraden a angehört, d. h., dass die Punkte T die Schnittpunkte der Geraden a unter sich sind. Die 10 Punkte T sind also die Ecken des Fünfseits $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5$, und da diese Ecken Pole der Seiten des vollständigen Fünfecks in Bezug auf den Fundamentalkegelschnitt sind, so müssen die Seiten a des vollständigen Fünfseits auch Polaren der respectiven Ecken des vollständigen Fünfecks in Bezug auf denselben Kegelschnitt sein. Die Polare eines Punktes eines Kegelschnittes in Bezug auf diesen ist aber die Tangente in diesem Punkte an den Kegelschnitt.

Mithin sind die Geraden $a_1, \ldots$ die Tangenten in den respectiven Punkten $A_1, \ldots$ an den durch letztere bestimmten Kegelschnitt.

Nachdem bewiesen, dass die sechs Geraden durch jeden Fundamentalpunkt in eine zusammenfallen, kann man sich die Construction der Geraden a erleichtern, indem man von den fünf möglichen vollständigen Vierecken zwei Paare so wählt, dass die zwei Gruppen von je drei gemeinsamen Fundamentalpunkten alle fünf umfassen, wie dieses z. B. das erste und letzte Paar Vierecke, Tab. p. 5 u. 6, thun. Zieht man dann die zugehörigen Geraden r, so schneiden sich bei jedem Paare Vierecke jede zwei, welche einen gemeinsamen Doppelindex besitzen, in einem Punkte T, dessen Index eben dieser Doppelindex ist. Die Verbindungslinien jedes dieser Punkte mit den beiden Fundamentalpunkten, die eine Zahl seines Index zum Index haben, sind die verlangten Geraden a.

Die Geraden r des ersten Paares Vierecke sind:

$$r_{12;34}, r_{13;24}, r_{14;23}$$
$$\text{resp. } r_{12;35}, r_{13;25}, r_{15;23}$$

Nun ist:

$$(r_{12;34}\, r_{12;35}) \equiv T_{12}$$
$$(r_{13,24}\, r_{13;25}) \equiv T_{13}$$
$$(r_{14;23}\, r_{15;2_3}) \equiv T_{23}$$

und $(T_{12}\,A_1) \equiv a_1, (T_{12}\,A_2) \equiv a_2,$
$(T_{13}\,A_1) \equiv a_1, (T_{13}\,A_3) \equiv a_3,$
$(T_{23}\,A_2) \equiv a_2, (T_{23}\,A_3) \equiv a_3.$

Bei den Vierecken $A_1\ A_3\ A_4\ A_5$ und $A_2\ A_3\ A_4\ A_5$ verfährt man ebenso. Bemerkt soll hier werden, dass also durch jeden Punkt T alle r gehen, deren einer Doppelindex mit dem von T übereinstimmt.

Weil nun die Geraden a Tangenten an den Fundamentalkegelschnitt in den Punkten A sind, so ergiebt sich hier eine einfache Construction der Tangenten in fünf Punkten eines Kegelschnittes, auch wenn derselbe nicht gezeichnet vorliegt, mittels des Linials allein.

III.

Nach einem bekannten Satze liegen die Ecken zweier Dreiecke, welche in Bezug auf denselben Kegelschnitt sich selbst conjugiert sind, auf einem Kegelschnitte.

Das Diagonaldreieck eines vollständigen Vierecks ist aber ein Dreieck, dessen Ecken sich selbst conjugiert sind in Bezug auf einen Kegelschnitt durch die Ecken des Vierecks. Hiernach sind die Diagonaldreiecke:

$$R_{13,45}\,R_{14,35}\,R_{15,34} \text{ und } R_{23,45}\,R_{24,35}\,R_{25,34}$$

der respectiven Vierecke:

$$A_1\,A_3\,A_4\,A_5 \text{ und } A_2\,A_3\,A_4\,A_5$$

zwei Dreiecke, deren Ecken sich selbst conjugiert sind in Bezug auf den Kegelschnitt der Fundamentalpunkte. Die Ecken derselben, d. h. die sechs Diagonalpunkte:

$$R_{13,45}, R_{14,35}, R_{15,34}, R_{23,45}, R_{24,35}, R_{25,34}$$

liegen also auf einem Kegelschnitte. Betrachtet man die beiden vollständigen Vierecke, denen dieser Kegelschnitt seine Existenz verdankt, so findet man, dass dieselben von den $10\,t$ die Seite t_{12} nicht umfassen. Es liegt also Grund vor, den Kegelschnitt mit K_{12} zu bezeichnen. Wir werden hierzu noch mehr Grund haben, wenn wir im nächsten Art. sehen werden, dass die Seite t_{12} auch mit dem Kegelschnitte selbst im Zusammenhange steht.

Was von den sechs obigen Diagonalpunkten gesagt worden, gilt von jeden sechs eines Paares vollständiger Vierecke, welche aus je vier Ecken eines vollständigen Fünfecks gebildet sind. Solcher Paare existieren zehn; wir haben also den Satz:

Die 15 Diagonalpunkte R eines vollständigen Fünfecks liegen zehnmal zu je sechs auf einem Kegelschnitte.

Die zu einem Kegelschnitte gehörigen Punkte ergeben sich aus der Tabelle p. 13 als die jedesmaligen sechs verschiedenen Punkte einer Zeile.

IV.

Verbindet man die sechs Diagonalpunkte der vollständigen Vierecke:

$$A_1 A_3 A_4 A_5 \text{ und } A_2 A_3 A_4 A_5$$

so zu einem Sechseck, dass jedesmal zwei nicht zu demselben vollständigen Vierecke gehörigen Punkte R auf einer Seite liegen, wobei auch ausgeschlossen sein soll, dass eine Gerade t Seite des Sechsecks wird, so erhält man das Sechseck:

$$R_{14,35}\, R_{25,34}\, R_{13,45}\, R_{24,35}\, R_{15,34}\, R_{23,45}.$$

Gegenseiten sind:

$$R_{14,35}\, R_{25,34} \text{ und } R_{24,35}\, R_{15,34}$$
$$R_{25,34}\, R_{13,45} \text{ und } R_{15,34}\, R_{23,45},$$
$$R_{13,45}\, R_{24,35} \text{ und } R_{23,45}\, R_{14,35}.$$

Die Schnittpunkte derselben, sie sollen $S(s)$ genannt werden, liegen nach dem Pascal'schen Satze auf einer Geraden. Die Seiten des Sechsecks sind aber nach Art. I. nichts anderes, als Geraden h, so dass wir auch sagen können: die sechs Geraden h der beiden vollständigen Vierecke schneiden sich in gewisser Ordnung paarweise genommen in drei Punkten S einer Geraden. Greift man nun zwei als Gegenseiten des Sechsecks auftretende Geraden h, etwa

$$R_{14,35}\, R_{25,34} \text{ und } R_{24,35}\, R_{15,34}$$

heraus, so ist in Bezug auf den Fundamentalkegelschnitt der Punkt $(r_{14,35}\, r_{25,34})$ Pol von $R_{14,35}\, R_{25,34}$ und Punkt $(r_{24,35}\, r_{15,34})$ Pol von $R_{24,35}\, R_{15,34}$.

Im vollständigen Vierecke

$$A_1\,A_3\,A_4\,A_5$$

sind: $A_3, T_{34}, (a_3\,t_{45}), T_{35}$ vier harmonische Punkte als Schnittpunkte von a_3 mit den vier harmonischen Strahlen:

$$t_{13}, r_{15,34}, t_{45}, r_{14,35}.$$

Ebenfalls harmonisch sind die vier Punkte:

$$\{(r_{14,35}\,r_{25,34}, r_{24,35}\,r_{15,34})\,a_3\}, T_{34}, (a_3\,t_{45}), T_{35}$$

im volständigen Vierecke

I. II. III. IV.

$$(r_{14,35}\,r_{25,34}), R_{13,45}, (r_{24,35}\,r_{15,34}), R_{23,45}.$$

Nennt man die Ecken kurz I., II., III., IV., so ist:

$$\text{I. II.} = r_{14,35},\quad \text{III. IV.} = r_{24,35},$$
$$\text{I. III.} = (r_{14,35}\,r_{25,34}, r_{24,35}\,r_{15,34}),\quad \text{II. IV.} = t_{45},$$
$$\text{I. IV.} = r_{25,34},\quad \text{II. III.} = r_{15,34};\ \text{also:}$$
$$(\text{I. II., III. IV.}) = T_{35},\quad (\text{I. IV., II. III.}) = T_{34}.$$

Nun ist aber $T_{34}\,T_{35} = a_3$, also sind obige vier Punkte harmonisch. Beide Gruppen harmonischer Punkte haben drei Punkte gemeinsam; also auch den vierten, d. h. die Gerade

$$(r_{14,35}\,r_{25,34}, r_{24,35}\,r_{15,34})$$

geht durch A_3. Es ist jedoch diese Gerade als Verbindungslinie der Pole von

$$R_{14,35}\,R_{25,34} \text{ und } R_{24,35}\,R_{15,34}$$

Polare des Durchschnittes der beiden letzten Geraden, und da sie durch A_3, den Berührungspunkt von a_3 geht, muss ihr Pol d. h. der Durchschnittspunkt der beiden Geraden h, auf a_3 liegen.

Weiter sind im vollständigen Vierecke

$$A_1\,A_2\,A_3\,A_4$$

die Punkte: $T_{13}, (a_3\,t_{12}), T_{23}$. A_3 harmonisch. Dies sind nähmlich die Schnittpunkte von a_3 mit den von $R_{12,34}$ ausgehenden harmonischen Strahlen:

$$r_{13,24}, t_{12}, r_{14,23}, t_{34}.$$

Dasselbe ergiebt sich für die vier Punkte: $T_{13}, (R_{14,35}\,R_{25,34}, R_{24,35}\,R_{15,34}), T_{23}, A_3$; denn im vollständigen Vierecke

$$R_{14,35}\,R_{24,35}\,R_{15,34}\,R_{25,34}$$

sind $(R_{14,35}\,R_{25,34}, R_{24,35}\,R_{15,34})$ und $(t_{34}\,t_{35}) = A_3$ zwei Diagonal-

punkte. Ihre Verbindungsgerade ist a_3. Dieselbe wird von dem dritten Paare Gegenseiten $R_{14,35}R_{15,34} = r_{13,45}$ und $R_{24,35}R_{25,34} = r_{23,45}$ in T_{13}, resp. T_{23} geschnitten; also sind diese Punkte und die beiden Diagonalpunkte harmonisch. Beide Gruppen von Punkten stimmen in den drei Punkten: T_{13}, T_{23}, A_3 überein; mithin auch in den vierten, d. h. $(a_3\, t_{12}) \equiv (R_{14,35}\, R_{25,34}, R_{24,35}\, R_{15,34})$. Weil der Punkt auf t_{12} und auf a_3 liegt, d. h. Schnittpunkt beider Geraden ist, wollen wir ihn mit $S_{12,3}$ bezeichnen. In derselben Weise ergiebt sich:

$$S_{12,4} \equiv (a_4\, t_{12}) \equiv (R_{15,34}\, R_{23,45}, R_{25,34}\, R_{13,45})$$
$$S_{12,5} \equiv (a_5\, t_{12}) \equiv (R_{14,35}\, R_{23,45}, R_{24,35}\, R_{13,45})$$

Wir finden also, dass die sechs Geraden h, die zu dem betrachteten Paare vollständiger Vierecke gehören, sich in bestimmter Ordnung paarweise auf der zehnten nicht in den Vierecken enthaltenen Seite t_{12} schneiden, und dass diese Schnittpunkte und die der Seite t_{12} mit den Tangenten a_3, a_4, a_5 in den Fundamentalpunkten, die t_{12} nicht bestimmen, identisch sind. Hieraus folgt der im vorigen Artikel angedeutete Zusammenhang des Kegelschnittes K_{12} mit t_{12}; es ist nämlich t_{12} die Pascal'sche Linie des dem Kegelschnitte einbeschriebenen Sechsecks der Diagonalpunkte, wofern diese Punkte in der oben erwähnten Weise zu demselben verbunden werden. Alles findet bei jedem der zehn möglichen Paare von vollständigen Vierecken statt, so dass wir allgemein sagen können:

Die 60 Geraden h schneiden sich ordentlich gepaart in 30 Punkten S, von welchen je drei auf jeder Seite t liegen und mit den Schnittpunkten der betreffenden Seite t mit den Tangenten a, in den drei die Seite t nicht bestimmenden Fundamentalpunkten an den Kegelschnitt derselben gezogen, identisch sind.

Die nachstehende Tabelle hat den Hauptzweck, dem Leser ein Bild der paarweise Zusammengehörigkeit der Geraden h zu entwerfen. Zugleich wird dieselbe die ausgesprochene Identität überall zeigen und endlich, wie im vorigen Art. erwähnt, die Verteilung der Punkte R auf die zehn Kegelschnitte K_{12} etc. klarlegen.

Seite.	Geradenpaar h.	S.	Geradenpaar h.	S.	Geradenpaar h.	S.	K.
t_{12}	$R_{14,35}\,R_{25,34},\ R_{24,35}\,R_{15,34}$	$S_{12,3}$	$R_{13,45}\,R_{25,34},\ R_{23,45}\,R_{15,34}$	$S_{12,4}$	$R_{13,45}\,R_{24,35},\ R_{23,45}\,R_{14,35}$	$S_{12,5}$	K_{12}
t_{13}	$R_{15,24}\,R_{25,34},\ R_{14,25}\,R_{24,35}$	$S_{13,2}$	$R_{15,24}\,R_{23,45},\ R_{12,45}\,R_{24,35}$	$S_{13,4}$	$R_{14,25}\,R_{23,45},\ R_{12,45}\,R_{25,34}$	$S_{13,5}$	K_{13}
t_{14}	$R_{13,25}\,R_{23,45},\ R_{15,23}\,R_{25,34}$	$S_{14,2}$	$R_{15,23}\,R_{24,35},\ R_{12,35}\,R_{23,45}$	$S_{14,3}$	$R_{13,25}\,R_{24,35},\ R_{12,35}\,R_{25,34}$	$S_{14,5}$	K_{14}
t_{15}	$R_{14,23}\,R_{24,35},\ R_{13,24}\,R_{23,45}$	$S_{15,2}$	$R_{14,23}\,R_{25,34},\ R_{12,34}\,R_{23,45}$	$S_{15,3}$	$R_{12,34}\,R_{24,35},\ R_{13,24}\,R_{25,34}$	$S_{15,4}$	K_{15}
t_{23}	$R_{15,24}\,R_{14,35},\ R_{15,34}\,R_{14,25}$	$S_{23,1}$	$R_{12,45}\,R_{14,35},\ R_{13,45}\,R_{14,25}$	$S_{23,4}$	$R_{12,45}\,R_{15,34},\ R_{13,45}\,R_{15,24}$	$S_{23,5}$	K_{23}
t_{24}	$R_{13,25}\,R_{15,34},\ R_{15,23}\,R_{13,45}$	$S_{24,1}$	$R_{13,25}\,R_{14,35},\ R_{12,35}\,R_{13,45}$	$S_{24,3}$	$R_{14,35}\,R_{15,23},\ R_{12,35}\,R_{15,34}$	$S_{24,5}$	K_{24}
t_{25}	$R_{13,45}\,R_{14,23},\ R_{13,24}\,R_{14,35}$	$S_{25,1}$	$R_{12,34}\,R_{13,45},\ R_{13,24}\,R_{15,34}$	$S_{25,3}$	$R_{14,23}\,R_{15,34},\ R_{12,34}\,R_{14,35}$	$S_{25,4}$	K_{25}
t_{34}	$R_{12,45}\,R_{15,23},\ R_{12,35}\,R_{15,24}$	$S_{34,1}$	$R_{12,45}\,R_{13,25},\ R_{12,35}\,R_{14,25}$	$S_{34,2}$	$R_{14,25}\,R_{15,23},\ R_{13,25}\,R_{15,24}$	$S_{34,5}$	K_{34}
t_{35}	$R_{12,45}\,R_{14,23},\ R_{12,34}\,R_{14,25}$	$S_{35,1}$	$R_{12,34}\,R_{15,24},\ R_{12,45}\,R_{13,24}$	$S_{35,2}$	$R_{13,24}\,R_{14,25},\ R_{14,23}\,R_{15,24}$	$S_{35,4}$	K_{35}
t_{45}	$R_{12,34}\,R_{13,25},\ R_{12,35}\,R_{13,24}$	$S_{45,1}$	$R_{12,34}\,R_{15,23},\ R_{12,35}\,R_{14,23}$	$S_{45,2}$	$R_{13,25}\,R_{14,23},\ R_{13,24}\,R_{15,23}$	$S_{45,3}$	K_{45}

Der Umstand, dass die Punkte S auf den Tangenten a liegen, kann ebenfalls zur Construction der letzteren benutzt werden. Man braucht nur die Geraden h in der durch die Tabelle festgesetzten Ordnung paarweise zu nehmen, und die Schnittpunkte S derselben der Tabelle gemäss mit den Fundamentalpunkten zu verbinden. Am besten wählt man auch hier zwei Paar vollständige Vierecke wie bei der Construction der Tangenten mittelst der Geraden r cf. Art. III.

V.

Wir sahen im letzten Art., dass die Schnitte S der Paare h mit den Schnitten der Seiten t und Tangenten a identisch sind. Diese Thatsache giebt uns ein Mittel an die Hand, die auf jeder Tangente a liegenden Punkte S und ihre Anzahl zu finden. Jede Tangente geht durch einen Fundamentalpunkt, durch welchen ausserdem vier Seiten t gehen, so dass von den 10 t nur 6 zur Geltung kommen. Jede Tangente a wird von 6 Seiten t und 6 Punkten S geschnitten.

Da es fünf Tangenten a giebt, so stimmt die Anzahl 30 der Punkte S hiermit überein. Wie die Punkte auf die Tagenten verteilt sind, ersieht man aus der Tab. p. 13. Es sind die jedesmaligen Punkte S, deren Indices nach dem Komma dieselbe Zahl haben, auf der Tangente mit eben dieser Zahl als Index gelegen.

Jede sechs auf einer Tangente liegenden Punkte S bilden eine Involution.

Dieses folgt aus dem Satze: „Jede Gerade wird von den sechs Seiten eines vollständigen Vierecks in einer Involution geschnitten."

Jede sechs Punkte S auf einer Tangente sind nämlich die Schnittpunkte derselben mit den sechs Seiten des vollständigen Vierecks, das den Fundamentalpunkt, durch welchen die Tangente geht, nicht enthält.

Mit Hülfe der Betrachtungen des Art. IV. lässt sich ein anderer Beweis dafür erbringen, das die Geraden a Tangenten an den Kegelschnitt der Fundamentalpunkte in diesen sind

Nach einem bekannten Satze liegen bei jedem einem Kegelschnitte einbeschriebenen Fünfecke die Durchschnittspunkte der beiden Paare nicht aneinanderstossenden Seiten und der Schnittpunkt der jedesmaligen fünften Seite mit der Tangente in der gegenüberstehenden Ecke auf einer Geraden. Es sind nun t_{12}, t_{45} und t_{15}, t_{34} zwei Paar nicht aneinanderstossende Seiten. Die Verbindungslinie ihrer Durchschnitte ist:

$$h = R_{12,45} R_{15,34}.$$

Dieselbe geht nach Tab. p. 13. Zeile 5 durch $S_{23,5}$, d. h. durch den Schnittpunkt von t_{23} mit a_5; folglich ist a_5 Tangente in A_5 etc..

VI.

Ausser den in den beiden letzten Art. gefundenen Lagen der Punkte S, zu je drei auf jeder Seite t und zu je sechs auf jeder Tangente a, haben diese Punkte noch zwei andere Lagen auf Geraden.

Im vollständigen Vierecke;

$$A_1 T_{12} A_2 R_{13,24}$$

nämlich sind die Gegenseiten:

$$\begin{aligned} A_1 T_{12} &= a_1 \text{ und } A_2 R_{13,24} = t_{24}, \\ A_1 A_2 &= t_{12} \text{ und } T_{12} R_{13,24} = r_{12,34} \\ A_1 R_{13,24} &= t_{13} \text{ und } A_2 T_{12} = a_2. \end{aligned}$$

Weiter sind $(a_1 t_{24}) = S_{24,1}$ und $(a_2 t_{13}) = S_{13,2}$ zwei Diagonalpunkte, deren Verbindungslinie $S_{13,2} S_{24,1}$ von dem dritten Paare Gegenseiten in zwei Punkten getroffen wird, die mit $S_{13,2}$ und $S_{24,1}$ harmonisch sind. Es sind also:

$$S_{13,2}, (S_{13,2} S_{24,1}, r_{12,34}), S_{24,1}, (S_{13,2} S_{24,1} t_{12})$$

vier harmonische Punkte.

Dasselbe sind

$$S_{13,2}, (S_{13,2} S_{24,1}, r_{12,34}), S_{24,1}, (S_{13,2} S_{24,1}, r_{14,23});$$

denn diese Punkte sind die Schnitte von $S_{13,2} S_{24,1}$ mit dem von $R_{13,24}$ ausgehenden Büschel der vier harmonischen Strahlen

$$t_{13}, r_{12,34}, t_{24}, r_{14\,23}.$$

Die ersten drei Punkte der beiden Gruppen sind identisch; also fallen auch die vierten zusammen. Der vierte Punkt liegt nach der ersten Gruppe auf t_{12}, nach der zweiten auf $r_{14,23}$, und da diese Geraden sich nur in $R_{12,34}$ treffen, so muss der vierte Punkt mit diesem identisch sein, d. h. $S_{13,2}\,S_{24,1}$ geht durch $R_{12,34}$.

Man sieht sofort, dass $S_{13,2}$ und $S_{24,1}$ auf t_{13} und t_{24}, d. h. auf einem Paare Gegenseiten des vollständigen Vierecks liegen, von welchem $R_{12,34}$ ein Diagonalpunkt ist. Es liegt mithin die Vermutung nahe, dass noch mehrere Paare S mit $R_{12,34}$ auf einer Geraden liegen. Um diese Paare und ihre Anzahl zu bestimmen, stellen wir das Indexgesetz der Geraden auf. Wir teilen die Zahlen des Index von R in zwei Gruppen und schreiben in die erste Gruppe die Zahlen des ersten Doppelindex $_{1,2}$, in die zweite die des zweiten Doppelindex $_{3,4}$; also

$$\begin{matrix} \text{I.} & {}_{1,2,} \\ \text{II.} & {}_{3,4,} \end{matrix}$$

so ergiebt sich, dass der Doppelindex von $S_{13,2}$ und $S_{24,1}$ eine Zahl aus I., die zweite aus II. nimmt, der einfache Index bei beiden eine Zahl aus I. ist. Demselben Gesetze genügen offenbar die Indices der Punkte $S_{14,2}, S_{23,1}$. Da weiter jede Gruppe die Zahlen eines Doppelindex von R enthält, diese letzteren aber gleichwertig sind, so sind auch die Gruppen gleichwertig und man kann dieselbe deshalb vertauschen. Hierdurch erhält man wieder zwei Paar Punkte, deren Indices nach obigem Gesetze gebildet sind, nämlich $S_{13,4}\,S_{24,3}$ und $S_{14,3}\,S_{23,4}$. Der Punkt $R_{12,34}$ liegt folglich mit einem Paare S viermal auf einer Geraden. Dasselbe thut jeder der 15 andern Punkte R. Man hat also den Satz:

Jeder Punkt R liegt viermal mit je zwei Punkten S auf einer Geraden, die nicht eine Seite t ist. Es existieren mithin 60 solcher Geraden.

In Art. VII., wo uns diese Lage der Punkte S von Nutzen sein wird, ist eine Uebersichtstabelle beigefügt p. 18. Die vierte Lage betrifft wieder die Punkte S allein.

Die Dreiecke

$$R_{14,35}\,R_{25,34}\,R_{15,24} \text{ und } R_{15,34}\,R_{24,35}\,R_{14,25}$$

sind in Homologie, denn die Verbindungslinien entsprechender Ecken sind:

$$R_{14,35}\,R_{15,34} = r_{13,45},\quad R_{25,34}\,R_{24,35} = r_{23,45},\quad R_{15,24}\,R_{14,25} = r_{12,45},$$

und diese drei Geraden r gehen durch T_{45}. Es liegen mithin die drei Durchschnitte entsprechender Seiten auf einer Geraden. Die Seiten sind Geraden h, und es ergiebt sich aus der Tab. p. 13, dass sich:

$R_{14,35}\,R_{25,34}$ und $R_{15,24}\,R_{24,35}$ in $S_{12,3}$ nach Z. 1, Col. 1,
$R_{25,34}\,R_{15,24}$ und $R_{24,35}\,R_{14,25}$ in $S_{13,2}$ nach Z. 2, Col. 1,
$R_{15,24}\,R_{14,35}$ und $R_{14,25}\,R_{15,34}$ in $S_{23,1}$ nach Z. 5, Col. 1,

schneiden. Diese drei Punkte S liegen also auf einer Geraden, die f heissen mag. Dieselben drei Punkte S sind Schnittpunkte von resp. t_{12} mit a_3, t_{13} mit a_2, t_{23} mit a_1. Die Geraden t sind Seiten des Dreiecks:

$$A_1\,A_2\,A_3$$

und die jedem t zugehörige Gerade a geht durch die gegenüberliegende Ecke. Also kann man auch sagen, die Schnittpunkte der Seiten des Dreiecks $A_1\,A_2\,A_3$ mit den Geraden a durch die resp. Gegenecken liegen auf einer Geraden f_{123}. Dieses findet bei jedem aus drei Fundamentalpunkten gebildeten Dreieck statt. Nun lassen sich aber die fünf Fundamentalpunkte zehnmal zu je drei zusammenfassen, und daraus folgt der Satz:

Die 30 Punkte S liegen zehnmal zu je drei auf einer Geraden, wobei die jedesmaligen 3 Punkte nur von drei Fundamentalpunkten abhängig sind.

Dieser Satz ist natürlich kein anderer als der bekannte Satz, dass bei jedem einem Kegelschnitte einbeschriebenen Dreiecke die drei Schnittpunkte der Seiten mit den Tangenten in den resp. Gegenecken auf einer Geraden liegen.

VII.

Es ist im vorigen Art. die Rede von Punkten S gewesen, die von drei Fundamentalpunkten abhängig sind. Wenngleich das Wort abhängig nicht in dem engen Sinne des Art. I. zu nehmen ist, so ist es hier doch wohl anwendbar, da nachgewiesen,

dass die Punkte S auf den Tangenten a liegen und Tangenten in beliebig vielen Punkten unabhängig von andern Punkten des Kegelschnittes an diesen construiert werden können.

In diesem weiteren Sinne sind:

$$\begin{array}{lll} S_{12,3}, & S_{13,2}, & S_{14,2} \\ S_{12,4}, & S_{13,4}, & S_{14,3} \\ S_{34,1}, & S_{24,1}, & S_{23,1} \\ S_{34,2}, & S_{24,3}, & S_{23,4} \end{array}$$

zwölf Punkte, die nur von den vier Fundamentalpunkten A_1, A_2, A_3, A_4 abhängig sind. Diese Punkte S stehen in einer gewissen Zusammengehörigkeit, und da zum Nachweise derselben die in Art. VI. gefundene Lage der Punkte R und S nötig ist, so soll zunächst eine Tabelle folgen, durch welche die Zusammengehörigkeit dieser Punkte sofort ersichtlich ist.

Es liegen auf einer Geraden mit:

Punkt.	die Punkte.	die Punkte.	die Punkte.	die Punkte.
$R_{12,34}$	$S_{13,2}$, $S_{24,1}$	$S_{13,4}$, $S_{24,3}$	$S_{14,2}$, $S_{23,1}$	$S_{14,3}$, $S_{23,4}$
$R_{13,24}$	$S_{12,3}$, $S_{34,1}$	$S_{12,4}$, $S_{34,2}$	$S_{14,2}$, $S_{23,4}$	$S_{14,3}$, $S_{23,1}$
$R_{14,23}$	$S_{12,3}$, $S_{34,2}$	$S_{12,4}$, $S_{34,1}$	$S_{13,2}$, $S_{24,3}$	$S_{13,4}$, $S_{24,1}$
$R_{12,35}$	$S_{13,2}$, $S_{25,1}$	$S_{13,5}$, $S_{25,3}$	$S_{15,2}$, $S_{23,1}$	$S_{15,3}$, $S_{23,5}$
$R_{13,25}$	$S_{12,3}$, $S_{35,1}$	$S_{12,5}$, $S_{35,2}$	$S_{15,2}$, $S_{23,5}$	$S_{15,3}$, $S_{23,1}$
$R_{15,23}$	$S_{12,3}$, $S_{35,2}$	$S_{12,5}$, $S_{35,1}$	$S_{13,2}$, $S_{25,3}$	$S_{13,5}$, $S_{25,1}$
$R_{12,45}$	$S_{14,2}$, $S_{25,1}$	$S_{14,5}$, $S_{25,4}$	$S_{15,2}$, $S_{24,1}$	$S_{15,4}$, $S_{24,5}$
$R_{14,25}$	$S_{12,4}$, $S_{45,1}$	$S_{12,5}$, $S_{45,3}$	$S_{15,2}$, $S_{24,5}$	$S_{15,4}$, $S_{24,1}$
$R_{15,24}$	$S_{12,4}$, $S_{45,2}$	$S_{12,5}$, $S_{45,1}$	$S_{14,2}$, $S_{25,4}$	$S_{14,5}$, $S_{25,1}$
$R_{13,45}$	$S_{14,3}$, $S_{35,1}$	$S_{14,5}$, $S_{35,4}$	$S_{15,3}$, $S_{34,1}$	$S_{15,4}$, $S_{34,5}$
$R_{14,35}$	$S_{13,4}$, $S_{45,1}$	$S_{13,5}$, $S_{45,3}$	$S_{15,3}$, $S_{34,5}$	$S_{15,4}$, $S_{34,1}$
$R_{15,34}$	$S_{13,4}$, $S_{45,3}$	$S_{13,5}$, $S_{45,1}$	$S_{14,3}$, $S_{35,4}$	$S_{14,5}$, $S_{35,1}$
$R_{23,45}$	$S_{25,3}$, $S_{34,2}$	$S_{25,4}$, $S_{34,5}$	$S_{35,2}$, $S_{24,3}$	$S_{24,5}$, $S_{35,4}$
$R_{24,35}$	$S_{25,4}$, $S_{34,2}$	$S_{25,3}$, $S_{34,5}$	$S_{23,4}$, $S_{45,2}$	$S_{23,5}$, $S_{45,3}$
$R_{25,34}$	$S_{23,4}$, $S_{45,3}$	$S_{23,5}$, $S_{45,2}$	$S_{24,3}$, $S_{35,4}$	$S_{24,5}$, $S_{35,2}$

Nun ist es leicht nachzuweisen, dass die sechs Punkte:

$$S_{13\cdot 2},\ S_{24\cdot 1},\ S_{23,1},\ S_{14,3},\ S_{23\cdot 4},\ S_{13,4}$$

ein Pascal'sches Sechseck bilden; denn die Schnittpunkte der Gegenseiten sind:

$$(S_{13\cdot 2}\ S_{24\cdot 1}\ S_{14\cdot 3}\ S_{23,4}) \equiv R_{12\cdot 34},$$
$$(S_{24\cdot 1}\ S_{23\cdot 1}\ S_{23\cdot 4}\ S_{13,4}) \equiv (a_1\ a_4) \equiv T_{14},$$
$$(S_{23\cdot 1}\ S_{14\cdot 3}\ S_{13,4}\ S_{13,2}) \equiv (S_{23,1},\ S_{14\cdot 3},\ t_{13}) \equiv R_{13\cdot 24};$$

diese drei Punkte liegen aber auf $r_{14,23}$. Obige sechs Punkte liegen also auf einem Kegelschnitte.

Dasselbe thun die sechs Punkte:

$$S_{24\cdot 1},\ S_{13\cdot 2},\ S_{14,2},\ S_{14\cdot 3},\ S_{23\cdot 4},\ S_{13\cdot 4};$$

denn bildet man die Pascal'sche Linie des Sechsecks, so ergiebt sich die Gerade $r_{13\cdot 24}$. Die Schnittpunkte der drei Paar Gegenseiten sind nämlich:

$$(S_{24,1}\ S_{13,2},\ S_{14,3}\ S_{23,4}) \equiv R_{12,34},$$
$$(S_{13\cdot 2}\ S_{14,2},\ S_{23,4}\ S_{13\cdot 4}) \equiv (a_2,\ a_4) \equiv T_{24},$$
$$(S_{14\cdot 2}\ S_{14\cdot 3},\ S_{,13\cdot 4}\ S_{24\cdot 1}) \equiv (t_{14}\cdot\ S_{13\cdot 4}\ S_{24\cdot 1}) \equiv R_{14\cdot 23},$$

und diese drei Punkte liegen auf $r_{13\cdot 24}$. Beide Kegelschnitte haben fünf Punkte gemeinsam, fallen also zusammen.

Wir haben somit den Siebenpunkt-Kegelschnitt:

$$S_{13\cdot 2}, S_{13,4}, S_{14\cdot 2}, S_{14,3}, S_{23\cdot 1}, S_{23,4}, S_{24,1}.$$

Endlich bilden die sechs Punkte:

$$S_{24\cdot 1}, S_{13\cdot 2}, S_{24\cdot 3}, S_{14,3}, S_{23,4}\ S_{23\cdot 1}$$

ein Pascal'sches Sechseck mit den Durchschnitten der Gegenseiten:

$$(S_{24,1}\ S_{13\cdot 2}\cdot\ S_{14,3}\ S_{23,4}) \equiv R_{12,34},$$
$$(S_{13\cdot 2}\ S_{24\cdot 3},\ S_{23\cdot 4}\ S_{23,1}) = (S_{13,2}\ S_{24\cdot 3},\ t_{23}) \equiv R_{14,23},$$
$$(S_{24,3}\ S_{14,3},\ S_{23,1}\ S_{24,1}) \equiv (a_1\ a_3) \equiv T_{13}$$

auf der Geraden $r_{13\cdot 24}$. Mithin sind auch diese sechs Punkte S Punkte eines Kegelschnittes, welcher, da er mit dem Kegelschnitte der sieben Punkte fünf gemeinsam hat, mit diesem identisch ist. Es liegen also die acht Punkte:

$$S_{13\cdot 2}, S_{13\cdot 4}, S_{24,1}, S_{24\cdot 3},$$
$$S_{14,2}, S_{14\cdot 3}, S_{23,1}, S_{23\cdot 4}$$

auf einem Kegelschnitte. Dieses sind die acht von den 12 nur von vier Fundamentalpunkten abhängigen Punkten S auf p. 18, die in der zweiten und dritten Colonne enthalten sind. Zudem sind von den acht Punkten die in jeder Zeile stehenden die vier auf einem Paar Gegenseiten des vollständigen Vierecks: $A_1 A_2$ $A_3 A_4$ liegenden Punkte S.

Wir haben also das Resultat: Die acht Punkte S, die auf zwei Paar Gegenseiten eines vollständigen Vierecks liegen und nur von den vier Ecken desselben abhängig sind, liegen auf einem Kegelschnitte. Zu jedem vollständigen Vierecke gehören drei solcher Kegelschnitte, da man seine drei Paar Gegenseiten dreimal paaren kann; also zu den fünf vollständigen Vierecken, die das vollständige Fünfeck enthält, 15.

Allgemein hat man daher den Satz:

Die 30 Punkte S liegen 15mal zu je acht auf einem Kegelschnitte, wobei die jedesmaligen acht Punkte von nur vier Fundamentalpunkten im weiteren Sinne abhängen.

Die Zusammengehörigkeit der Punkte erkennt man aus der Tabelle dieses Art. Die acht Punkte S jeder Zeile gehören zu einem Kegelschnitte, weshalb wir den Kegelschnitten den Index des in derselben Zeile stehenden jedesmaligen Punktes R, des Schnittpunktes des jedesmaligen dritten Gegenseitenpaares, geben, sie also mit $K_{12\cdot 34}$ etc. bezeichnen wollen.

VIII.

Wenden wir auf die beiden Diagonaldreiecke jedes der zehn Paare von vollständigen Vierecken, die aus je vier Fundamentalpunkten gebildet sind, den Satz an: „Die Seiten zweier demselben Kegelschnitte einbeschriebenen Dreiecke sind sechs Tangenten eines Kegelschnittes", so finden wir, dass die zu jedem Paare vollständiger Vierecke gehörigen sechs Geraden r einen Kegelschnitt berühren. Allgemein haben wir demnach:

Die 15 Geraden r berühren zehnmal zu je sechs einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}_{12}$ etc.

Zu demselben Resultate gelangt man, wenn man bedenkt, dass die Geraden r Polaren der Punkte R in Bezug auf den Fundamentalkegelschnitt sind. Es sind deshalb Pascal'sches Sechseck und Brianchon'sches Sechsseit der sechs Diagonalpunkte R, resp. der sechs Diagonalen r, die zu einem Paare von vollständigen Vierecken gehören, sowohl, als auch die Kegelschnitte beider Polarfiguren in Bezug auf denselben Kegelschnitt.

Man braucht also nur in der Tabelle p. 13 t durch T, R durch r und S durch s, wo s die Polare der Punkte S in Bezug auf den Fundamentalkegelschnitt bezeichnen, zu ersetzen, um sich über die Kegelschnitte der Geraden r zu orientieren.

IX.

Jedes Paar Dreiecke, von welchen jedes einzelne aus einer von zwei gegenüberliegenden Seiten eines im vollständigen Fünfecke enthaltenen vollständigen Vierecks und den Tangenten a in den die Seite bestimmenden Fundamentalpunkten gebildet ist, hat die Eigenschaft, dass die drei Schittpunkte je zweier Seiten auf einer Geraden r liegen. Folglich liegen die sechs übrigen Punkte, in welchen die Seiten des einen Dreiecks die des andern schneiden, auf einem Kegelschnitte. Es sind dies jedesmal die beiden andern Schnittpunkte T der in Rede stehenden Tangente und die vier Schnittpunkte S der beiden Gegenseiten mit den Tangenten.

Hieraus geht sofort hervor, dass die sechs Punkte jedes dieser Kegelschnitte nur von den vier Ecken des vollständigen Vierecks im weiteren Sinne abhängen, dem die Gegenseiten, welche das Paar Dreiecke mit bilden, angehören.

Zwei in der angegebenen Weise gebildete Dreiecke sind z. B.

$$A_1 A_2 T_{12} \text{ und } A_3 A_4 T_{34}.$$

Die Seiten sind beziehungsweise:

$$t_{12}, a_1, a_2 \text{ und } t_{34}, a_3, a_4.$$

Nun ist $(t_{12}\, t_{34}) \equiv R_{12\cdot 34}, (a_1\, a_3) \equiv T_{13}$ und $(a_2\, a_4) \equiv T_{24}$; diese Punkte liegen aber auf $r_{13\cdot 24}$. Die sechs übrigen Schnittpunkte der Seiten sind:

$$(t_{12}\,a_3) \equiv S_{12\cdot 3}, \quad (t_{12}\,a_4) \equiv S_{12\cdot 4},$$
$$(a_1\,t_{34}) \equiv S_{34\cdot 1}, \quad (a_1\,a_4) \equiv T_{14},$$
$$(a_2\,t_{34}) \equiv S_{34\cdot 2}, \quad (a_2\,a_3) \equiv T_{23}.$$
$$S_{12\cdot 3}, S_{12\cdot 4}, S_{34\cdot 1}, S_{34\cdot 2}, T_{14}, T_{23}$$

sind also sechs Punkte eines Kegelschnittes.

Dasselbe Paar Dreiecke ist ein zweites Mal collinear. Es schneiden sich:

$$t_{12}\,t_{34} \text{ in } R_{12\cdot 34},\ a_1\,a_4 \text{ in } T_{14},\ a_2\,a_3 \text{ in } T_{23}$$

auf $r_{14\cdot 23}$. Die sechs übrigen Schnittpunkte der Seiten sind dann:

$$S_{12\cdot 3}, S_{12\cdot 4}, S_{34\cdot 1}, S_{34\cdot 2}, T_{13}, T_{24}.$$

Beide Kegelschnitte haben die vier Punkte S gemeinsam. In gleicher Weise gehören zu jedem Paare ebenso gebildeter Dreiecke zwei solche Kegelschnitte. Jedes vollständige Viereck hat drei Paar Gegenseiten, also die fünf im vollständigen Fünfeck enthaltenen 15 Paare. Jedem Paare entsprechen zwei Kegelschnitte; es existieren mithin 30.

Die 30 S und 10 T liegen 30mal zu je sechs auf einem Kegelschnitte, und zwar sind die jedesmaligen Punkte, 4 S und 2 T, zusammen von nur vier Fundamentalpunkten im weiteren Sinne abhängig.

Aus der Tabelle ersieht man die Zusammengehörigkeit der Punkte.

Vierecke.	Dreiecke.	Axe d. Collin.	Zusammengehörige Punkte.	K.
$A_1\,A_2\,A_3\,A_4$	$A_1\,A_2\,T_{12}$ $A_3\,A_4\,T_{34}$	$r_{13,24}$ $r_{14,23}$	$T_{14}, T_{23}, S_{12,3}, S_{12,4}, S_{34,1}, S_{34,2}$ $T_{13}, T_{24},$	$K^{14,23}_{13,24}$ $K^{13,24}_{14,23}$
	$A_1\,A_3\,T_{13}$ $A_2\,A_4\,T_{24}$	$r_{12,34}$ $r_{14,23}$	$T_{14}, T_{23}, S_{13,2}, S_{13,4}, S_{24,1}, S_{24,3}$ $T_{12}, T_{34},$	$K^{14,23}_{12,34}$ $K^{12,34}_{14,23}$
	$A_1\,A_4\,T_{14}$ $A_2\,A_3\,T_{23}$	$r_{12,34}$ $r_{13,24}$	$T_{13}, T_{24}, S_{14,2}, S_{14,3}, S_{23,1}, S_{23,4}$ $T_{12}, T_{34},$	$K^{13,24}_{12,34}$ $K^{12,34}_{13,24}$
$A_1\,A_2\,A_3\,A_5$	$A_1\,A_2\,T_{12}$ $A_3\,A_5\,T_{35}$	$r_{13,25}$ $r_{15,23}$	$T_{15}, T_{23}, S_{12,3}, S_{12,5}, S_{35,1}, S_{35,2}$ $T_{13}, T_{25},$	$K^{15,23}_{13,25}$ $K^{13,25}_{15,23}$
	$A_1\,A_3\,T_{13}$ $A_2\,A_5\,T_{25}$	$r_{12,35}$ $r_{15,23}$	$T_{15}, T_{23}, S_{13,2}, S_{13,5}, S_{25,1}, S_{25,3}$ $T_{12}, T_{35},$	$K^{15,23}_{12,35}$ $K^{12,35}_{15,23}$
	$A_1\,A_5\,T_{15}$ $A_2\,A_3\,T_{23}$	$r_{12,35}$ $r_{13,25}$	$T_{13}, T_{25}, S_{15,2}, S_{15,3}, S_{23,1}, S_{23,5}$ $T_{12}, T_{35},$	$K^{13,25}_{12,35}$ $K^{12,35}_{13,25}$
$A_1\,A_2\,A_4\,A_5$	$A_1\,A_2\,T_{12}$ $A_4\,A_5\,T_{45}$	$r_{14,25}$ $r_{15,24}$	$T_{15}, T_{24}, S_{12,4}, S_{12,5}, S_{45,1}, S_{45,2}$ $T_{14}, T_{25},$	$K^{15,24}_{14,25}$ $K^{14,25}_{15,24}$
	$A_1\,A_4\,T_{14}$ $A_2\,A_5\,T_{25}$	$r_{12,45}$ $r_{15,24}$	$T_{15}, T_{24}, S_{14,2}, S_{14,5}, S_{25,1}, S_{25,4}$ $T_{12}, T_{45},$	$K^{15,24}_{12,45}$ $K^{12,45}_{15,24}$
	$A_1\,A_5\,T_{15}$ $A_2\,A_4\,T_{24}$	$r_{12,45}$ $r_{14,25}$	$T_{14}, T_{25}, S_{15,2}, S_{15,4}, S_{24,1}\, S_{24,5},$ $T_{12}, T_{45},$	$K^{14,25}_{12,45}$ $K^{12,45}_{14,25}$
$A_1\,A_3\,A_4\,A_5$	$A_1\,A_3\,T_{13}$ $A_4\,A_5\,T_{45}$	$r_{14,35}$ $r_{15,34}$	$T_{15}, T_{34}, S_{13,4}, S_{13,5}, S_{45,1}, S_{45,3}$ $T_{14}, T_{35},$	$K^{15,34}_{14,35}$ $K^{14,35}_{15,34}$
	$A_1\,A_4\,T_{14}$ $A_3\,A_5\,T_{35}$	$r_{13,45}$ $r_{15,34}$	$T_{15}, T_{34}, S_{14,3}, S_{14,5}, S_{35,1}, S_{35,4}$ $T_{13}, T_{45},$	$K^{15,34}_{13,45}$ $K^{13,45}_{15,34}$
	$A_1\,A_5\,T_{15}$ $A_3\,A_4\,T_{34}$	$r_{13,45}$ $r_{14,35}$	$T_{14}, T_{35}, S_{15,3}, S_{15,4}, S_{34,1}, S_{34,5}$ $T_{13}, T_{45},$	$K^{14,35}_{13,45}$ $K^{13,45}_{14,35}$
$A_2\,A_3\,A_4\,A_5$	$A_2\,A_3\,T_{23}$ $A_4\,A_5\,T_{45}$	$r_{24,35}$ $r_{25,34}$	$T_{25}, T_{34}, S_{23,4}, S_{23,5}, S_{45,2}, S_{45,3}$ $T_{24}, T_{35},$	$K^{25,34}_{24,35}$ $K^{24,35}_{25,34}$
	$A_2\,A_4\,T_{24}$ $A_3\,A_5\,T_{35}$	$r_{23,45}$ $r_{25,34}$	$T_{25}, T_{34}, S_{24,3}, S_{24,5}, S_{35,2}, S_{35,4}$ $T_{23}, T_{45},$	$K^{25,34}_{23,45}$ $K^{23,45}_{25,34}$
	$A_2\,A_5\,T_{25}$ $A_3\,A_4\,T_{34}$	$r_{23,45}$ $r_{24,35}$	$T_{24}, T_{35}, S_{25,3}, S_{25,4}, S_{34,2}, S_{34,5}$ $T_{23}, T_{45},$	$K^{24,35}_{23,45}$ $K^{23,45}_{24,53}$

Bei jedem Vierecke kommen zwei Kegelschnitte vor, zu denen dieselbe Gerade r gehört, z. B. beim Viereck $A_1 A_2 A_3 A_4$:

$$T_{14}, T_{23}, S_{13\cdot 2}, S_{13\cdot 4}, S_{24\cdot 1}, S_{24\cdot 3}$$

und

$$T_{13}, T_{24}, S_{14\cdot 2}, S_{14\cdot 3}, S_{23\cdot 1}, S_{23\cdot 4}.$$

Zu beiden Kegelschnitten gehört $r_{12,34}$.

Es liegt nahe, den Kegelschnitten den Index dieser Geraden r zu geben; um aber eine gleiche Benennung zu vermeiden, fügen wir den oberen Index hinzu, nennen also die Kegelschnitte $K_{12,34}^{13,24}$ resp. $K_{12,34}^{14,23}$ so dass der obere Index jedesmal aus den Indices der beiden T, die auf dem betreffenden Kegelschnitte liegen, zusammengesetzt ist.

In Art. VII. wurden Kegelschnitte gefunden, deren Indices mit den unteren der Kegelschnitte dieses Art. übereinstimmen. So fanden wir dort den Kegelschnitt $K_{12\cdot 34}$, dessen Index mit den unteren Indices der beiden obigen Kegelschnitte übereinstimmt. Auf den letzteren liegen die Punkte:

$$S_{13\cdot 2}, S_{13\cdot 4}, S_{14\cdot 2}, S_{14\cdot 3}, S_{23\cdot 1}, S_{23\cdot 4}, S_{24\cdot 1}, S_{24\cdot 3}.$$

Diese acht Punkte S sind es aber gerade, die auf dem Kegelschnitte $K_{12\cdot 34}$ liegen cf. Tab. p. 18, Z. 1. Dieser interessante Zusammenhang beider Kegelschnittarten besteht ganz allgemein.

X.

Die sechs Punkte:

$$R_{12,34}, S_{25\cdot 4}, S_{35\cdot 4}, S_{14,5}, S_{14\cdot 3}, S_{25,3}$$

bilden ein Pascal'sches Sechseck, weil die Schnittpunkte der drei Paare Gegenseiten:

$(R_{12,34}\, S_{25\cdot 4}, S_{14\cdot 5}\, S_{14\cdot 3}) \equiv (R_{12,34}\, S_{25\cdot 4}, t_{14}) \equiv R_{14,35}$, Tab. p. 13. Z. 7, Col. 3,

$(S_{25\cdot 4}\, S_{35,4}, S_{14\cdot 3}\, S_{25\cdot 3}) \equiv (a_4\, a_3) \equiv T_{34}$,

$(S_{35,4}\, S_{14,5}, S_{25\cdot 3}\, R_{12\cdot 34}) \equiv R_{13\cdot 45}$ nach Tab. p. 18 Z. 10, Col. 2 und Tab. p. 13 Z. 7, Col. 2.

sind, und die Punkte $R_{14,35}, T_{34}, R_{13,45}$ auf $r_{15,34}$ liegen. Obige sechs Punkte liegen demnach auf einem Kegelschnitte.

Ebenfalls sechs Ecken eines Pascal'schen Sechsecks und damit Punkte eines Kegelschnittes sind:

$$R_{12,34}, S_{34,5}, S_{14,5}, S_{35,4}, S_{14,3}, S_{25,3};$$

denn verbindet man die Punkte in der gegebenen Reihenfolge, so schneiden sich die Gegenseiten:

$R_{12,34} S_{34,5}$ und $S_{35,4} S_{14,3}$, d. h. t_{34} und $S_{35,4} S_{14,3}$ in $R_{15,34}$, Tab. p. 18, Z. 12, Col. 3,

$S_{34,5} S_{14,5}$ und $S_{14,3} S_{25,3}$ oder a_5 und a_3 in $T_{35}, S_{14,5} S_{35,4}$ und $S_{25,3} R_{12,34}$ in $R_{13,45}$ nach Tab. p. 18, Z. 10, Col. 2 und Tab. p. 13, Z. 7, Col. 2;

$R_{15,34}, T_{35}, R_{13,45}$ liegen aber auf $r_{14,35}$.

Beide Kegelschnitte haben die fünf Punkte:

$$R_{12,34}, S_{14,3}, S_{14,5}, S_{25,3} S_{35,4}$$

gemeinsam, folglich sind sie identisch, d. h. wir haben einen Kegelschnitt mit den sieben Punkten:

$$R_{12,34}, S_{14,3}, S_{14,5}, S_{25,3}, S_{25,4}, S_{34,5}, S_{35,4}.$$

Auf diesem Kegelschnitte liegt nun noch der Punkt $R_{12,35}$. Es ist nämlich

$$R_{12,34}\ R_{12,35}\ S_{35,4}\ S_{14,5}\ S_{14,3}\ S_{25,3}$$

wiederum ein Pascal'sches Sechseck mit den Schnittpunkten der Gegenseiten:

$$(R_{12,34}\, R_{12,35}, S_{14,5}\, S_{14,3}) \equiv (t_{12}\, t_{14}) \equiv A_1,$$
$$(R_{12,35}\, S_{35,4}, S_{14,3}\, S_{25,3}) \equiv (t_{35}\, a_3) \equiv A_3,$$
$$(S_{35,4}\, S_{14,5}, S_{25,3}\, R_{12,34}) \equiv R_{13,45}$$

auf t_{13}. Die letzten sechs Punkte liegen also auf einem Kegelschnitte, der mit dem Siebenpunkt-Kegelschnitte die Punkte:

$$R_{12,34}, S_{14,3}, S_{14,5}, S_{25,3}, S_{35,4}$$

gemein hat. Es liegt also auch $R_{12,35}$ auf dem letzteren, und es ergiebt sich als Resultat ein Achtpunkt-Kegelschnitt $K_{12,3}^{14,25}$:

$$R_{12,34}, R_{12,35}, S_{14,3}, S_{14,5}, S_{25,3}, S_{25,4}, S_{34,5}, S_{35,4}.$$

Der untere Index des Kegelschnitts ist folgendermassen gebildet: Unsere beiden R haben einen Doppelindex gemein. Diesen setzen wir vor das Komma, die beiden andern Doppelindices müssen dann notwendig eine Zahl gemein haben, welche hinter das Komma gesetzt wird. Der obere Index ist aus dem Paar gemeinsamer Doppelindices unter den Punkten S zusammengesetzt.

Es kommt nun darauf an, die Anzahl und das Bildungsgesetz der Achtpunkt-Kegelschnitte festzustellen. Zu jedem R giebt es vier andere, die den einen Doppelindex mit ihm gemein haben, z. B. zu $R_{12,34}$ kann man fügen: $R_{12,35}, R_{12,45}, R_{15,34}, R_{25,34}$. Folglich haben wir $\frac{15.4}{2} = 30$ solche Paare von R. Greift man nun eins heraus, etwa das obige, $R_{12,34}, R_{12,35}$, so fragt es sich, welche S sind hinzuzufügen. Wir zerteilen die fünf Zahlen in drei Gruppen und schreiben in I.: 1, 2, die des gemeinsamen Doppelindex, in II.: 3, die gemeinsame Zahl der beiden andern Doppelindices, in III.: 4, 5, die beiden andern der letzteren. Mun nehmen wir die sechs S in drei Abteilungen:

1) $S_{14,3}\, S_{14,5}$. Der Doppelindex enthält je eine Zahl aus I. und III., der einfache Index ist einmal eine Zahl in II., das andere Mal die andere aus III.

2) $S_{25,3}\, S_{25,4}$. Der Doppelindex enthält je die andere Zahl I. und III. als vorhin, der einfache ist nach demselben Gesetze gebildet.

3) $S_{34,5}\, S_{35,4}$. Der Doppelindex enthält die Zahl in II. und eine aus III., der einfache Index die andere aus III.

Die letzte Abteilung ist eindeutig gebildet, die beiden andern lassen sich auf zwei Weisen bilden, nämlich:

$$S_{14,3}, S_{14,5}, S_{25,3}, S_{25,4}$$
$$S_{15,3}, S_{15,4}, S_{24,3}, S_{24,5}.$$

Jedes Paar R liefert folglich zwei Achtpunkt-Kegelschnitte, und wir erhalten deren $30.2 = 60$.

Die 15 Punkte R und 30 Punkte S liegen 60 mal zu je acht auf einem Kegelschnitte, und zwar sind die jedesmaliegen acht Punkte 2 R und 6 S, die zusammen von allen fünf Fundamentalpunkten abhängen. z. B.

$$R_{12,34}, R_{12,35}, S_{14,3}, S_{14,5}, S_{25,3}, S_{25,4}, S_{34,5}, S_{35,4}.$$

Um eine gleiche Bezeichnung der Kegelschnitte mit demselben Paare R zu vermeiden, ist der obere Index zugefügt. Der andere Kegelschnitt mit $R_{12,34}\,R_{12,35}$ heisst $K_{12,3}^{15,24}$.

Zu bemerken ist noch, dass diese Kegelschnitte mit den früheren Kegelschnittarten in keinem Zusammenhange stehen.

XI.

Es existieren 30 Kegelschnitte, von denen jeder sechs Punkte, 1 R und 5 S enthält, die zusammen von allen fünf Fundamentalpunkten abhängig sind.

Denn

$$R_{12,34}\,S_{15,3}\,S_{25,3}\,S_{34,5}\,S_{25,4}\,S_{15,4}$$

ist ein Pascal'sches Sechseck, dessen Schnittpunkte der Gegenseiten auf $r_{25,34}$ liegen. Es sind nämlich die Punkte:

$(R_{12,34}\,S_{15,3},\,S_{34,5}\,S_{25,4}) = R_{23,45}$ nach Tab. p. 13, Z. 4, Col. 2 und Tab. p. 18, Z. 13, Col. 2;

$(S_{15,3}\,S_{25,3}\,S_{25,4}\,S_{15,4}) \equiv (a_3\,a_4) \equiv T_{34}$,

$(S_{25,3}\,S_{34,5},\,S_{15,4}\,R_{12,34}) \equiv R_{24,35}$ nach Tab. p. 18, Z. 14, Col. 2 und Tab. p. 13, Z. 4, Col. 3.

Obige sechs Punkte liegen also auf einem Kegelschnitte. Wir wollen nun das Indexgesetz aufstellen. Zu diesem Zwecke teilen wir die Zahlen 1 bis 5 in drei Gruppen:

I.: 1 und 2,
II. 5,
III. 3 und 4,

so dass in der ersten und dritten die Zahlen eines Doppelindex des auf dem Kegelschnitte liegenden Punktes R, in II. die fünfte übrigbleibende Zahl steht. Nun unterscheiden wir die 5 S in drei Abteilungen:

1) $S_{15,3}\,S_{15,4}$. Der Doppelindex enthält eine Zahl aus I., die andere aus II., die einfachen Indices sind Zahlen aus III.
2) $S_{25,3}\,S_{25,4}$. Die Indices sind nach demselben Gesetze gebildet, jedoch ist nun die andere Zahl aus I. genommen.
3) $S_{34,5}$. Der Doppelindex besteht aus den Zahlen in III., der einfache aus der Zahl in II.

Da die Doppelindices jedes Punktes R gleichwertig sind, so sind es auch die Gruppen I. und III. Wir können dieselben also vertauschen, und bei dieser Gruppierung lassen sich nach obigem Gesetze die fünf neuen Punkte:

$$S_{35,1}, S_{35,2}, S_{45,1}, S_{45,2}, S_{12,5}$$

zu $R_{12,34}$ hinzufügen. Zu jedem R gehören also zwei Kegelschnitte, und mithin zu den 15 R deren 30.

Was die Bezeichnung dieser Kegelschnitte betrifft, so wollen wir als unteren Index den des jedesmaligen Punktes R, als oberen den Doppelindex des nach Abteilung 3 gebildeten Punktes S wählen, sodass die gefundenen obigen Kegelschnitte $K^{34}_{12,34}$ und $K^{12}_{12,34}$ heissen.

XII.

Die Gerade

$h \equiv (R_{14,23}\, S_{45,3}\, R_{13,25})$, cf. Tab. p. 13 Z. 10, Col. 3,

ist Pascal'sche Linie des Sechsecks

$$R_{12,34}\, T_{13}\, T_{23}\, R_{12,35}\, S_{45,2}\, S_{45,1};$$

denn es ist:

$(R_{12,34}\, T_{13}, R_{12,35}\, S_{45,2}) \equiv (r_{13,24}, R_{12,35}\, S_{45,2}) \equiv R_{14,23}$, Tab. p. 13. Z. 10, Col. 2,

$$(T_{13}\, T_{23}, S_{45,2}\, S_{45,1}) \equiv (a_3\, t_{45}) \equiv S_{45,3},$$

$(T_{23}\, R_{12,35}, S_{45,1}\, R_{12,34}) \equiv (r_{15,23}, S_{45,1}\, R_{12,34}) \equiv R_{13,25}$, Tab. p. 13. Z. 10, Col. 1.

Wir haben also wiederum einen Sechspunkt-Kegelschnitt gefunden. Das Bildungsgesetz dieser Art Kegelschnitte erhält man wie folgt. Man zerteilt die Zahlen 1 bis 5 wieder in Gruppen wie in Art. X p. 26.

I: 1 und 2,
II: 3,
III: 4 und 5,

Darauf nimmt man die Punkte T und S in zwei Abteilungen: 1) $T_{13}\, T_{23}$. Der Index enthält eine Zahl aus I, die andere aus II.

2) $S_{45,1}\,S_{45,2}$. Der Doppelindex ist gebildet aus den Zahlen in III, der einfache Index ist je eine Zahl aus I.

Beide Abteilungen sind eindeutig gebildet und deshalb existirt nur ein Paar T und ein Paar S zu den Punkten $R_{12,34}$ und $R_{12,35}$. Jedes Paar Punkte R mit einem gemeinsamen Doppelindex liefert also einen Kegelschnitt, und da 30 solcher Paare vorhanden sind, so hat man den Satz:

Von den Punkten R, T und S liegen 30mal je sechs, von jeder Art zwei, auf einem Kegelschnitte, wobei die jedesmaligen sechs Punkte von allen fünf Fundamentalpunkten abhängen.

Wir bezeichnen die Kegelschnitte mit $K_{12,3}$ etc. d. h. setzen den gemeinsamen Doppelindex der jedesmaligen Punkte R vor das Komma und hinter daselbe die gemeinsame Zahl der beiden andern Doppelindices.

XIII.

Die 55 Punkte, $15\ R + 10\ T + 30\ S$, haben eine weitere Lage auf Kegelschnitten.

Die sechs Punkte:

$$S_{35,4}\,T_{24}\,T_{23}\,S_{14,3}\,R_{12,34}\,R_{12,35}$$

sind sechs Punkte eines Kegelschnittes: denn sie bilden ein Pascal'sches Sechseck, da die Punkte:

$(S_{35,4}\,T_{24}, S_{14,3}\,R_{12,34}) \equiv (a_4,\ S_{14,3}\,R_{12,34}) \equiv S_{23,4}$ nach Tab. p. 18. Z. 1, Col. 2,

$$(T_{24}\,T_{23}, R_{12,34}\,R_{12,35}) \equiv (a_2\,t_{12}) \equiv A_2,$$
$$(T_{23}\,S_{14,3}, R_{12,35}\,S_{35,4}) \equiv (a_3\,t_{35}) \equiv A_3.$$

auf t_{23} liegen.

Ferner sind:

$$T_{23}\,T_{24}\,R_{25,34},\ S_{35,4}\,R_{12,35},\ S_{14,3}$$

ebenfalls sechs Ecken eines Pascal'schen Sechsecks und damit Punkte eines Kegelschnittes. Die Schnittpunkte der Gegenseiten sind nämlich:

$$(T_{23}\,T_{24}, S_{35,4}\,R_{12,35}) \equiv (a_2\,t_{35}) \equiv S_{35,2},$$

$$(T_{24}\,R_{25,34},\ R_{12,35}\,S_{14,3}) \equiv (r_{24,35},\ R_{12,35}\,S_{14,3}) \equiv R_{23,45},$$ Tab. p. 13. Z. 3, Col. 2,

$$(R_{25,34}\,S_{35,4},\ S_{14,3}\,T_{23}) \equiv (R_{25,34}\,S_{35,4},\ a_3) \equiv S_{24,3},$$ Tab. p. 18, Z. 15, Col. 3.

Der letztgefundene Kegelschnitt stimmt mit dem ersten in den fünf Punkten:

$$R_{12,35},\ T_{23},\ T_{24},\ S_{14,3},\ S_{35,4}$$

überein, ist mithin mit diesem identisch.

Wir haben nun einen Kegelschnitt mit den sieben Punkten:

$$R_{12,34},\ R_{25,34},\ T_{23},\ S_{14,3},$$
$$R_{12,35},\qquad T_{24},\ S_{35,4}.$$

Endlich ist

$$R_{14,25}\,S_{35,4}\,R_{12,35}\,R_{12,34}\,T_{23}\,T_{24}$$

ein Pascal'sches Sechseck. Die Schnitte der Gegenseiten sind:

$$(R_{14,25}\,S_{35,4},\ R_{12,34}\,T_{23}) \equiv (R_{14,25}\,S_{35,4},\ r_{14,23}) \equiv R_{13,24},$$ Tab. p. 13, Z. 9, Col. 3,

$$(S_{35,4}\,R_{12,35},\ T_{23}\,T_{24}) \equiv (t_{35}\,a_2) \equiv S_{35,2},$$

$$(R_{12,35}\,R_{12,34},\ T_{24}\,R_{14,25}) \equiv (t_{12}\,r_{15,24}) \equiv R_{12,45};$$

und $R_{13,24}, S_{35,2}, R_{12,45}$ liegen auf einer Geraden h cf. Tab. p. 13, Z. 9, Col. 2.

Von diesen auf einem Kegelschnitte liegenden sechs Punkten, liegen fünf auf dem Siebenpunkt-Kegelschnitt, also auch der sechste. Es resultiert ein Achtpunkt-Kegelschnitt mit den Punkten:

$$R_{12,34},\ R_{25,34},\ T_{23},\ S_{14,3},$$
$$R_{12,35},\ R_{14,25},\ T_{24},\ S_{35,4}.$$

Um die Anzahl dieser Kegelschnitte zu finden, beachten wir, dass auf jedem derselben zwei Punkte T liegen, deren Indices eine Zahl gemeinsam haben, d. h. die auf demselben a liegen. Auf jedem a liegen nur vier Punkte T. Diese lassen sich 6 mal zu je 2 zusammenfassen. Jedes a liefert demnach 6 der obigen Paare T, mithin die fünf Geraden a deren $5.6=30$.

Nun bestimmen wir zunächst das Bildungsgesetz. Zu diesem Zwecke bilden wir drei Gruppen und schreiben in die erste die verschiedenen Zahlen der Indices der T, in die zweite die gemeinsame Zahl derselben und in die dritte die von den Zahlen 1 bis 5 fehlenden, also, dies bei dem Paare $T_{23}\ T_{24}$ ausgeführt:

I: 3 und 4,
II: 2
III: 1 und 5.

Nun fassen wir die übrigen mit T_{23} und T_{24} auf einem Kegelschnitte liegenden Punkte in Abteilungen zusammen und schreiben in die erste:

$$R_{12,34}\ R_{25,34}.$$

Der gemeinsame Doppelindex enthält die Zahlen in I, die andern beiden Doppelindices sind aus je einer Zahl in II und III gebildet.

Die zweite Abteilung enthält:

$$R_{12,35}\ R_{14,25}.$$

Ein Doppelindex enthält Zahlen aus I und III, der andere aus II und III.

Dritte Abteilung:

$$S_{14,3}\ S_{35,4}.$$

Der Doppelindex besteht aus Zahlen, in I und III, die einfachen Indices sind die Zahlen aus I.

Von diesen Abteilungen ist die erste eindeutig gebildet, die beiden andern lassen sich auf zwei Weisen bilden, nämlich:

$$R_{12,35},\ R_{14,25},\ S_{14,3},\ S_{35,4}$$
$$R_{12,45},\ R_{13,25},\ S_{13,4},\ S_{45,3}.$$

Folglich liefert jedes der obigen Paare T zwei Achtpunkt-Kegelschnitte, also die 30 Paare $30.2 = 60$.

Auf jedem Kegelschnitte liegen zwei Paar Punkte R so beschaffen, dass die Punkte jedes Paares einen Doppelindex gemeinsam haben. Wir geben nun unseren Kegelschnitten zwei gleichgebildete Indices, einen oberen und einen unteren, von denen jeder den gemeinsamen Doppelindex der Punkte R

eines Paares, vor dem Komma und die gemeinsame Zahl der beiden anderen Doppelindices derselben R nach dem Komma hat. Hiernach heissen die zu T_{23} und T_{24} gehörigen Kegelschnitte $K_{12,3}^{25,4}$ und $K_{12,4}^{25,3}$.

Das allgemeine Resultat dieses Art. ist:

Von den 55 Punkten, $15R+10T+30S$, liegen 60mal je acht auf einem Kegelschnitte. Die jedesmaligen acht Punkte sind $4R+2T+2S$, die zusammen von allen fünf Fundamentalpunkten abhängig sind.

XIV.

Die bisherige Abhandlung setzt uns in den Stand, einige Resultate der folgenden Aufgabe, Crelle's Journal Bd. XXX. p. 273—276, gesammelte Werke Bd. II p. 348 Aufg. 5, durch einfache Rechnung zu finden. Vorab soll bemerkt werden, dass Steiner in dieser Aufgabe eine andere Bezeichnung als in Aufgabe 4 gewählt hat und besonders, dass s und r verwechselt sind.

Behandeln wir sechs beliebige Punkte eines Kegelschnittes in derselben Weise, wie dieses in Art. I mit fünf beliebigen Punkten der Ebene geschah, so erhalten wir $\frac{6.5}{2}=15$ Verbindungsgeraden derselben. Diese schneiden sich ausser in den gegebenen Punkten in

$$\frac{6.5.4.3}{8}=45$$

neuen, den Diagonalpunkten $R(s)$ des vollständigen Sechsecks. Zieht man weiter in den Fundamentalpunkten A die sechs Tangenten a (T) an den Kegelschnitt, so schneiden sich diese untereinander in $\frac{6.5}{2}=15$ Punkten $T(t)$ und endlich schneiden sich die $15t(S)$ und $6a(T)$, ausser in den gegebenen Punkten in $60S(r)$; denn jede Tangente schneidet $10t$, die nicht mit ihr durch denselben Punkt A gehen in $10S$.

Was nun die von Steiner gefundene Lage der 120 Punkte, $45R+15T+60S$, auf Kegelschnitten betrifft, so erkennen

wir in den 720 Achtpunkt-Kegelschnitten, wo jede 8 Punkte nur von fünf der gegebenen sechs Punkte abhängen, sofort unsere Kegelschnitte in den Art. X und XIII wieder. Wir fanden in jedem dieser Art. 60 Kegelschnitte, zusammen also 120. Soviel lieferte das vollständige Fünfeck, und da nun das vollständige Sechseck sechs vollständige Fünfecke enthält, liefert es 6.120=720 Kegelschnitte.

XV.

Zum Schlusse sagt Steiner, dass 45 mal 8 Punkte in irgend einem Kegelschnitte liegen, wobei die jedesmaligen 8 Punkte R und S (s und r) sind und von nur je vier gegebenen Punkten abhängig sind.

Diese Behauptung ist unhaltbar.

Von jeden 4 der gegebenen Punkte hängen 3 R und 12 S ab, z. B. von A_1, A_2, A_3, A_4:

$$R_{12,34},\ R_{13,24},\ R_{14,23}$$

und

I.	II.	III.
$S_{12,3}$	$S_{13,2}$	$S_{14,2}$
$S_{12,4}$	$S_{13,4}$	$S_{14,3}$
$S_{34,1}$	$S_{24,1}$	$S_{23,1}$
$S_{34,2}$	$S_{24,3}$	$S_{23,4}$.

Zwischen diesen Punkten sind 3 Combinationen möglich; es könnten nämlich auf einem Kegelschnitte liegen:

1) 1 R und 7 S,
2) 2 R und 6 S,
3) 3 R und 5 S.

1) Wir nehmen den Punkt $R_{12,34}$ und sehen zu, welche S zu ihm gehören können. In Colonne I lassen sich 4 Paare von Punkten bilden, von denen je eins mit $R_{12,34}$ auf einem Kegelschnitte liegen kann, nämlich: $S_{12,3}$ $S_{34,1}$, $S_{12,3}$ $S_{34,2}$, $S_{12,4}$ $S_{34,1}$, $S_{12,4}$ $S_{34,2}$. Jede andere Zusammenstellung der Punkte ist unmöglich, da $R_{12,34}$, $S_{12,3}$, $S_{12,4}$ auf t_{12} und $R_{12,34}$, $S_{34,1}$ $S_{34,2}$ auf t_{34} liegen. In Colonne II sind ebenfalls 4 Paare möglich: $S_{13,2}$

$S_{13,4}$, $S_{24,1}\,S_{24,3}$, $S_{13,4}\,S_{24,1}$, $S_{13,2}\,S_{24,3}$; denn $S_{13,2}\,S_{24,1}$ und $S_{13,4}\,S_{24,3}$ sind ausgeschlossen nach Tab. 18, Z. 1, Col. 1 u. 2.

Endlich kann man in Colonne III nur je eins der Paare: $S_{14,2}\,S_{14,3}$, $S_{23,1}\,S_{23,4}$, $S_{14,2}\,S_{23,4}$, $S_{14,3}\,S_{23,1}$ nehmen, da $S_{14,2}\,S_{23,1}$ und $S_{14,3}\,S_{23,4}$ nach Tab. p. 18, Z. 1, Col. 3 u. 4 fortfallen. Es finden sich also nur 6 Punkte S, aus jeder Colonne ein Paar, die mit $R_{12,34}$ zusammen auf einem Kegelschnitte liegen könnten. Dasselbe gilt von jedem Punkte R und deshalb ist Fall 1) unmöglich.

2) Wir suchen die möglichen Punkte S zu $R_{12,34}$, $R_{13,24}$. Es fallen hier in Colonne I von den obigen Paaren $S_{12,3}\,S_{34,1}$ und $S_{24,1}\,S_{24,3}$ fort nach Tab. p. 18, Z. 2, Col. 1 und 2.

In Colonne II werden unmöglich: $S_{13,2}\,S_{13,4}$ und $S_{24,1}\,S_{24,3}$, weil $R_{13,24}$, $S_{13,2}$, $S_{13,4}$ auf t_{13} und $R_{13,24}$, $S_{24,1}\,S_{24,3}$ auf t_{24} liegen; und in Colonne III die Paare $S_{14,2}\,S_{23,4}$ und $S_{14,3}\,S_{24,1}$ nach Tab. p. 18, Z. 2, Col. 3 und 4. Es bleiben also aus jeder Colonne 2 Paar Punkte möglich, von denen je eins mit den beiden R auf einem Kegelschnitte liegen kann. Wir wählen nun aus jeder Colonne ein Paar, etwa: $S_{12,3}\,S_{34,2}$ aus I, $S_{13,2}\,S_{24,3}$ aus II und $S_{23,1}\,S_{23,4}$ aus III, so sehen wir sofort, dass diese 6 Punkte nicht auf einem Kegelschnitte liegen können, da $S_{13,2}\,S_{12,3}$, $S_{23,1}$ auf f_{123} und $S_{23,4}$, $S_{24,3}$, $S_{34,2}$ auf f_{234} liegen nach Art. VI. Durch die Lage der Punkte S auf den Geraden f wird ferner die Lage der 3 Paare:

$$S_{12,4},\ S_{34,1},\ S_{13,4}\ S_{24,1},\ S_{14,2}\ S_{14,3}$$

auf einem Kegelschnitte illusorisch; denn es liegen: $S_{12,4}$, $S_{14,2}$, $S_{24,1}$ auf f_{124} und $S_{13,4}$, $S_{14,3}$, $S_{34,1}$ auf f_{134}.

Wir können überhaupt die sechs möglichen Paare S, nämlich aus Col.

$$\begin{aligned} &\text{I: } S_{12,3}\,S_{34,2},\ S_{12,4}\,S_{34,1},\\ &\text{II: } S_{13,2}\,S_{24,3},\ S_{13,4}\,S_{24,1},\\ &\text{III: } S_{14,2}\,S_{14,3},\ S_{23,1}\,S_{23,4} \end{aligned}$$

20 mal zu je drei combinieren.

Diese Combinationen zerfallen in drei Gruppen. Die eine ist die obige, bei welcher die Geraden f die Lage der sechs

Punkte S auf einem Kegelschnitte unmöglich machen. Bei der zweiten sind es die Tangenten a.

Zu ihr gehören die Combinationen:

$$S_{12,3}\ S_{34,2},\ S_{13,2}\ S_{24,3}.\ S_{14,2}\ S_{14,3};$$ denn

$S_{13,2}$, $S_{14,2}$, $S_{34,2}$ liegen auf a_2, $S_{12,3}$ $S_{14,3}$ $S_{24,3}$ auf a_3 und

$$S_{12,4}\ S_{34,1},\ S_{13,4}\ S_{24,1},\ S_{23,1}\ S_{23,4},$$ wo

$S_{23,1}$, $S_{24,1}$, $S_{34,1}$ auf a_1 und $S_{12,4}$, $S_{13,4}$, $S_{23,4}$ auf a_4 liegen.

Die 16 übrigen Combinationen gehören in die dritte Gruppe. Bei ihnen tritt die Lage der Punkte R und S, Art. VI, störend auf. Ein Beispiel ist:

$$S_{12,3}\ S_{34,2},\ S_{12,4}\ S_{34,1},\ S_{13,2}\ S_{24,3}.$$

Hier liegen $R_{13,24}$, $S_{12,3}$, $S_{34,1}$ und $R_{13,24}$, $S_{12,4}$, $S_{34,2}$ auf einer Geraden, Tab. p. 18, Z. 2, Col. 1, resp. 2.

Der zweite Fall, $2R$ und $6S$, ist somit auch ausgeschlossen.

3) Welche Punkte S sind zu $R_{12,34}$, $R_{13,24}$, $R_{14,23}$ möglich? Es ist aus jeder Colonne nur je ein S möglich; denn es fallen alle Paare aus den einzelnen Colonnen des Falles 2) auch noch fort, und zwar:

$S_{12,3}\ S_{34,2}$ und $S_{12,4}\ S_{34,1}$ nach Tab. p. 18, Z. 3, Col. 1 und 2,
$S_{13,2}\ S_{24,3}$ und $S_{13,4}\ S_{24,1}$, cf. ibid. Col. 3 und 4,
$S_{14,2}\ S_{14,3}$ und $S_{23,1}\ S_{23,4}$, weil $R_{14,23}$ mit dem ersten Paare auf t_{14} mit dem andern auf t_{23} liegt.

Wir sehen also, dass keiner der 3 Fälle möglich ist.

In Art. VII hingegen wurde gefunden, dass die Punkte $S(r)$ allein 15 mal zu je acht auf einem Kegelschnitte liegen, wobei die jedesmaligen Punkte von nur je 4 Fundamentalpunkten abhängig waren. Dieses auf 6 beliebige Punkte eines Kegelschnittes übertragen lautet: Die Punkte $S(r)$ liegen 45 mal auf einem Kegelschnitte, wobei etc. Die Zahl 45 entsteht wie folgt. Zu jedem vollständigen Viereck gehören 3 Kegelschnitte. Das vollständige Sechseck enthält aber 15 vollständige Vierecke, so dass also 45 Kegelschnitte bestehen. Die Zahlen stimmen mithin überein, und scheint Steiner in Betreff der Punkte ein Schreibfehler untergelaufen zu sein.

Es muss in Aufgabe 5 am Schlusse heissen:

Ausserdem liegen von denselben 45 mal 8 in irgend einem Kegelschnitte K_2, wobei aber die jedesmaligen 8 Punkte nur $S(r)$ sind und von nur je vier gegebenen Punkten abhängen.

XVI.

Für den Rest der Abhandlung benötigen wir die Geraden h, Art. I. und Tab. Art. IV. Es würde zuweit führen, dieselben hier einzeln aufzuführen, zumal dem Leser ihre Bildung aus den genannten Art. klar geworden sein wird.

Hier soll nur die Anzahl derselben festgestellt werden. Das vollständige Fünfeck lieferte 60, und da das vollständige Sechseck 6 vollständige Fünfecke enthält, so hat es den Anschein, als ob hier $6.60=360h$ existierten.

Hierbei ist jedoch ausser Acht gelassen, dass das vollständige Sechseck 60 einfache und mit diesen 60 Pascal'sche Linien liefert, von denen jede 3 Geraden h absorbiert. Jede Pascal'sche Linie enthält nämlich 3 Punkte R, die nicht zu demselben vollständigen Vierecke gehören und diese lassen sich dreimal zu je zwei zusammenfassen. Es bleiben demnach $360-3.60=180h$ übrig.

Wir fahren nun in der Entwicklung fort und stellen den Satz auf:

Es lassen sich 180 Kegelschnitte aufstellen, von denen jeder 8 Punkte, $4R+4S$, enthält, die zusammen jedesmal von allen 6 gegebenen Punkten abhängen.

Folgende drei Sechsecke sind Pascal'sche, ihre Ecken mithin Punkte von Kegelschnitten.

1) $R_{12,56}\ R_{12,34}\ R_{25,46}\ R_{13,46}\ S_{13,5}\ S_{56,3}$,
2) $R_{12,34}\ R_{12,56}\ R_{13,46}\ R_{25,46}\ S_{25,3}\ S_{34,5}$,
3) $S_{25,3}\ S_{13,5}\ R_{13,46}\ R_{12,56}\ R_{12,34}\ S_{34,5}$.

Die 3 Schnittpunkte der Gegenseiten des ersten sind:

$R_{12,56}\ R_{12,34}\ R_{13,46}\ S_{13,5}) \equiv (t_{12}\, t_{13}) \equiv A_1$,
$(R_{12,34}\ R_{25,46}\ S_{13,5}\ S_{56,3}) \equiv R_{16,35}$, da $R_{12,34}$, $R_{25,46}$, $R_{16,35}$ Pascal'sche Linie des einfachen Sechsecks $A_1 A_2 A_5 A_3 A_4 A_6$ ist und $S_{13,5}$, $S_{56,3}$, $R_{16,35}$ eine Gerade nach Art. VII ist.

$(R_{25,46}\ R_{13,46},\ S_{56,3}\ R_{12,56}) \equiv (t_{46}\, t_{56}) \equiv A_6$ auf t_{16}, die des zweiten:

$$(R_{12,34}\ R_{12,56},\ R_{25,46}\ S_{25,3}) \equiv (t_{12}\, t_{25}) \equiv A_2,$$

$(R_{12,56}\ R_{13,46},\ S_{25,3}\ S_{34,5}) \equiv R_{24,35}$, weil $R_{12,56}$, $R_{24,35}$, $R_{13,46}$ Pascal'sche Linie des Sechsecks $A_1\ A_2\ A_4\ A_6\ A_5\ A_3$ und $S_{25,3}$, $S_{34,5}\ R_{24,35}$ eine Linie des Art. VII ist,

$$(R_{13,46}\ R_{25,46},\ S_{34,5}\ R_{12,34}) \equiv (t_{46}\, t_{34}) \equiv A_4 \text{ auf } t_{24}$$

und diejenigen des dritten:

$(S_{25,3}\ S_{13,5},\ R_{12,56}\ R_{12,34}) \equiv (S_{25,3}\ S_{13,5}\ t_{12}) \equiv R_{12,35}$ nach Art. VII,

$$(S_{13,5}\ R_{13,46},\ R_{12,34}\ S_{34,5}) \equiv (t_{13}\, t_{34}) \equiv A_3,$$

$(R_{13,46}\ R_{12,56},\ S_{34,5}\ S_{25,3}) \equiv R_{24,35}$; denn $R_{12,56}$, $R_{24,35}$, $R_{13,46}$ ist Pascal'sche Linie von $A_1\ A_2\ A_4\ A_6\ A_5\ A_3$ und $S_{34,5}$, $S_{25,3}$ $R_{24,35}$ liegen nach Art. VII auf einer Geraden. Die 3 Schnittpunkte liegen auf t_{35}.

Nun haben Kegelschnitt 2) und 3) fünf Punkte gemeinsam. Der Siebenpunkt-Kegelschnitt:

$$R_{12,34},\ R_{12,56},\ R_{13,46},\ R_{25,46},\ S_{13,5},\ S_{5,23},\ S_{34,5}$$

stimmt mit 1) in fünf Punkten überein, und es ergiebt sich der Achtpunkt-Kegelschnitt:

$$R_{12,34},\ R_{13,46},\ S_{34,5},\ S_{13,5}.$$
$$R_{12,56},\ R_{25,46},\ S_{56,3},\ S_{25,3}.$$

Die untereinanderstehende Punkte R haben einen Doppelindex sonst aber keine Zahl gemein. Jeder der 4 übrigen Doppelindices bildet den Doppelindex je eines Punktes S. Die einfachen Indices derselben sind die den Doppelindeces gemeinsamen Zahlen 3 und 5, welche nach der Ueberlegung zu verteilen sind, dass der einfache Index eines Punktes S nicht in seinem Doppelindex vorkommen kann. Die Bildung der Punkte S zeigt, dass sie eindeutig ist.

Es kommt deshalb nur darauf an festzustellen, wie oft sich zwei Paare von Punktepaaren R mit gleichem Doppelindex, wie sie unser Kegelschnitt enthält, finden lassen. Zu diesem Zwecke schreiben wir einen nicht gemeinsamen Doppelindex z. B. von $R_{12,34}\ R_{12,56}$ in eine Gruppe, den gemeinsamen in die zweite und den übrigbleibenden in die dritte Gruppe; also:

I: 3 und 4,
II: 1 und 2,
III: 5 und 6.

Von $R_{13,46}$ ist ein Doppelindex aus Zahlen in I und II gebildet, der andere aus solchen in I und III.

Der erste Doppelindex von $R_{25,46}$ enthält Zahlen aus II und III, der andere aus I und III. Ebenso gebildet sind:

$$R_{13,45},\ R_{14,35},\ R_{14,36},\ R_{23,45},\ R_{23,46},\ R_{24,35},\ R_{24,36}$$
$$R_{26,45},\ R_{26,35},\ R_{25,36},\ R_{16,45},\ R_{15,46},\ R_{16,35},\ R_{15,36}$$

Die Punkte gehören colonnenweise zusammen, da nur in dieser Zusammenstellung die nicht gemeinsamen Doppelindices keine Zahl gemeinsam haben wie es bei $R_{13,46}$ und $R_{25,46}$ der Fall ist. Eine Vertauschung der gleichwertigen Gruppen I und III bringt nichts Neues hervor.

Es lassen sich also zu $R_{12,34}$ $R_{12,56}$ acht Paare R hinzufügen.

Auf jeder Seite t liegen $6R$. Greifen wir nun einen Punkt R, heraus, so können wir denselben mit 5 auf jeder der ihn bildenden Seiten t liegenden Punkten R; also im Ganzen mit $10R$ paaren, so dass jedes Paar einen Doppelindex gemein hat. z. B. $R_{12,34}$ mit:

$$R_{12,35},\ R_{12,36},\ R_{12,45},\ R_{12,46},\ R_{12,56},$$
$$R_{15,34},\ R_{16,34},\ R_{25,34},\ R_{26,34},\ R_{34,56}.$$

Von diesen 10 Punkten sind aber nur $R_{12,56}$ und $R_{34,56}$ für uns brauchbar, da nur sie weiter keine Zahl mit $R_{12,34}$ gemein haben.

Jeder Punkt R liefert 2 Paare, die 45 R mithin

$$\frac{45.2}{2} = 45.$$

Jedes dieser Paare kann mit 8 andern auf einem Kegelschnitte liegen, so dass hiernach $\frac{45.2}{2} \cdot 8$ Kegelschnitte beständen. Diese Zahl ist aber doppelt zu gross; denn das Paaren der Paare ist ein gegenseitiges.

Wir erhalten also nur

$$\frac{45 \cdot 2}{2} \cdot \frac{8}{2} = 180.$$

Kegelschnitte.

Als Bezeichnung geben wir jedem Kegelschnitte zwei Indices einen unteren und einen oberen. Den unteren setzen wir aus den gemeinsamen Doppelindices der zwei Paar Punkte R zusammen, während wir den oberen aus den beiden gemeinsamen Zahlen der vier übrigen Doppelindices bilden. Der paradigmatische Kegelschnitt heisst hiernach $K^{35}_{12,46}$.

XVII.

Mit der im letzten Art. in Uebereinstimmung mit Steiner gefundenen Zahl 180 ist die Anzahl der Achtpunkt-Kegelschnitte, bei denen die jedesmaligen 8 Punkte von allen sechs gegebenen Punkten abhängen, noch nicht erschöpft. Es existieren vielmehr noch 720 solcher Kegelschnttte. Diese zerfallen in 2 Arten zu je 360.

1) $$R_{16,25}\, S_{16,3}\, T_{23}\, R_{12,34}\, R_{12,35}\, R_{35,46}$$

ist ein Pascal'sches Sechseck; denn

$$(R_{16,25}\, S_{16,3},\ R_{12,34}\, R_{12,35}) \equiv (t_{16}\, t_{12}) \equiv A_1,$$
$$(S_{16,3}\ \ T_{23},\ \ R_{12,35}\, R_{35,46}) \equiv (a_3\, t_{35}) \equiv A_3,$$

$(T_{23}\, R_{12,34},\ R_{35,46}\, R_{16,25}) \equiv (r_{14,23},\ R_{35,46}\, R_{16,25}) \equiv R_{13,24}$; denn $R_{13,24}\, R_{35,46}\, R_{16,25}$ ist Pascal'sche Linie des einfachen Sechsecks $A_1 A_3 A_5 A_2 A_4 A_6$. und $A_1, A_3, R_{13,24}$ liegen auf t_{13}.

2) Ebenfalls Pascal'sches Sechseck ist:

$$R_{16,25}\, S_{46,2}\, R_{35,46}\, R_{12,35}\, R_{12,34}\, S_{16,3}.$$

Die Schnittpunkte der Gegenseiten sind:

$$(R_{16,25}\, S_{46,2},\ R_{12,35}\, R_{12,34}) \equiv (R_{16,25}\, S_{46,2},\ t_{12}) \equiv R_{12,45},$$
$$(S_{46,2}\ \ R_{35,46},\ R_{12,34}\, S_{16,3}) \equiv (t_{46},\ R_{12,34}\, S_{16,3}) \equiv R_{23,46},$$
$$(R_{35,46}\, R_{12,35},\ S_{16,3}\, R_{16,25}) \equiv (t_{35}\, t_{16}) \equiv R_{16,35}.$$

$R_{12,45}\, R_{23,46}\, R_{16,35}$ ist Pascal'sche Linie des Sechsecks $A_1 A_2 A_3 A_5 A_4 A_6$,

3) Ein weiteres Pascal'sches Sechseck ist:

$R_{25;34}\, R_{12;34}\, T_{23}\, S_{46;2}\, R_{35;46}\, R_{16;25}$, da
$(R_{25;34}\, R_{12;34}, S_{46;2}\, R_{35;46}) \equiv (t_{34}\, t_{46}) \equiv A_4$,
$(R_{12;34}\, T_{23}, R_{35;46}\, R_{16;25}) \equiv (r_{14;23}, R_{35;46}\, R_{16;25}) \equiv R_{13;24}$, cf. 1),
$(T_{23}\, S_{46;2}, R_{16;25}\, R_{25;34}) \equiv (a_2, t_{25}) \equiv A_2$;

und diese drei Punkte liegen auf t_{24}.

Wegen der Uebereinstimmung von 1) und 2) in 5 Punkten erhalten wir den Siebenpunkt-Kegelschnitt:

$$\begin{matrix} R_{12;35},\ R_{16;25},\ R_{12;34},\ S_{16;3} \\ R_{35;46} \qquad\quad T_{23}, \quad S_{46;2} \end{matrix}$$

und da dieser mit 3) wieder fünf Punkte gemein hat, ergiebt sich der Achtpunktkegelschnitt:

$$\begin{matrix} R_{12;35},\ R_{16;25}\ R_{12;34},\ S_{16;3} \\ R_{35;46},\ R_{25;34},\ T_{23}, \quad S_{46;2}. \end{matrix}$$

Die Punkte R der beiden ersten Colonnen haben wie im vorigen Art. einen Doppelindex gemein, nämlich 35, resp. 25. Es bleiben noch die vier Doppelindices 12, 34, 16, 46. Von diesen bilden die beiden ersten den Index des fünften Punktes R in Colonne 3. Jeder der beiden andern bildet den Doppelindex eines Punktes S. Die einfachen Indices sind die den gemeinsamen Doppelindices 35 und 25 nicht gemeinsamen Zahlen 2 und 3, und zwar ist die 2, welche zu 46 hinzugefügt wird, nicht in dem Index 35,46 und die 3 in $S_{16;3}$ nicht in $R_{16;25}$ enthalten.

Der Index des Punktes T setzt sich aus den einfachen Indices der Punkte S zusammen. Es folgt hieraus, dass die Punkte der beiden letzten Colonnen eindeutig gebildet sind.

Zur näheren Bestimmung der Anzahl der Kegelschnitte schreiben wir die Zahlen des einen nicht gemeinsamen Doppelindex der Punkte R der ersten Colonne in eine Gruppe, die des gemeinsamen in die zweite und die des andern nicht gemeinsamen Doppelindex in die dritte Gruppe; also:

I: 1 und 2,
II: 3 und 5,
III: 4 und 6.

Bei den Punkten $R_{16;25}, R_{25;34}$ besteht der gemeinsame Doppelindex aus Zahlen in I und II, der eine nicht gemeinsame

Doppelindex aus Zahlen in I und III und der andere aus solchen in II und III.

Nach demselben Gesetze sind folgende Paare Punkte gebildet:

$$R_{14,25}, R_{14,23}, R_{16,23}, R_{13,24}, R_{13,26}, R_{15,24}, R_{15,26}$$
$$R_{25,36}, R_{23,56}, R_{23,45}, R_{13,56}, R_{13,45}, R_{15,36}, R_{15,34}.$$

Offenbar sind Gruppe I und III gleichwertig und deshalb vertauschbar. Hierdurch lassen sich nach obigem Gesetze noch die Paare bilden:

$$R_{24,56}, R_{14,56}, R_{14,36}, R_{24,36}, R_{16,34}, R_{26,34}, R_{16,45}, R_{26,45}$$
$$R_{13,56}, R_{23,56}, R_{25,36}, R_{15,36}, R_{25,34}, R_{15,34}, R_{23,45}, R_{13,45}$$

Die Punkte gehören colonnenweise zusammen. Zu dem Paare $R_{12,35}, R_{35,46}$ lassen sich also 16 Paare R finden. Nun existieren aber nach dem vorigen Art. 45 Paare R, die nur einen Doppelindex gemeinsam haben und jedes liegt mit 16 andern Paaren auf einem Kegelschnitte, so dass 45. 16 Kegelschnitte beständen. In Wirklichkeit bestehen aber nur:

$$\frac{45.16}{2} = 360,$$

da auch hier das Paaren der Paare ein gegenseitiges ist.

Der allgemeine Satz lautet also:

Die 120 Punkte $45R + 15T + 60S$, liegen 360 mal zu je 8 auf einem Kegelschnitte, wobei die jedesmaligen 8 Punkte, $5R + 1T + 2S$, von allen sechs gegebenen Punkten abhängen.

XVIII.

Der letzte Satz lautet:

Die Punkte R und S liegen 360 mal zu je acht auf einem Kegelschnitte. Die jedesmaligen Punkte sind $4R + 4S$, die zusammen von allen sechs gegebenen Punkten abhängen. z. B.

$$R_{13,25},\ R_{13,45},\ S_{45,2},\ S_{36,2}$$
$$R_{25,46},\ R_{12,46},\ S_{12,5},\ S_{36,5}.$$

Der Beweis beruht analog den früheren auf dem Nachweise, dass

1) $R_{13,45}\ R_{13,25}\ R_{25,46}\ R_{12,46}\ S_{36,2}\ S_{36,5}$,
2) $S_{36,2}\ S_{36,5}\ S_{12,5}\ R_{12,46}\ R_{25,46}\ R_{13,25}$,
3) $S_{36,2}\ S_{45,2}\ R_{13,45}\ R_{13,25}\ R_{25,46},\ R_{12,46}$

Pascal'sche Sechsecke sind.

Dieses ist aber der Fall; denn

ad 1). $(R_{13,45}\ R_{13,25},\ R_{12,46}\ S_{36,2}) \equiv R_{13,24}$,
$(R_{13,25}\ R_{25,46},\ S_{36,2}\ S_{36,5}) \equiv (t_{25}\ t_{36}) \equiv R_{25,36}$,
$(R_{25,46}\ R_{12,46},\ S_{36,5}\ R_{13,45}) \equiv R_{15,46}$ und

$R_{13,24}, R_{25,36}, R_{15,46}$ ist Pascal'sche Linie des Sechsecks $A_1\ A_3\ A_6\ A_4\ A_2\ A_5$.

ad 2). $(S_{36,2}\ S_{36,5},\ R_{12,46}\ R_{25,46}) \equiv (t_{36}\ t_{46}) \equiv A_6$,
$(S_{36,5}\ S_{12,5},\ R_{25,46}\ R_{13,25}) \equiv (a_5\ t_{25}) \equiv A_5$,
$(S_{12,5}\ R_{12,46},\ R_{13,25}\ S_{36,2}) \equiv R_{12,56}$,

und diese 3 Punkte liegen auf t_{56}.

ad. 3). $(S_{36,2}\ S_{45,2},\ R_{13,25}\ R_{25,46}) \equiv (t_{25}\ a_2) \equiv A_2$,
$(S_{45,2}\ R_{13,45},\ R_{25,46}\ R_{12,46}) \equiv (t_{45}\ t_{46}) \equiv A_4$,
$(R_{13,45}\ R_{13,25},\ R_{12,46}\ S_{36,2}) \equiv R_{13,24}$, auf t_{24}.

1) und 2) haben die fünf Punkte:

$$R_{12,46},\ R_{13,25},\ R_{25,46},\ S_{36,2},\ S_{36,5}$$

gemeinsam. Der resultierende Siebenpunkt-Kegelschnitt hat fünf Punkte mit 3) gemein, so dass obiger Achtpunkt-Kegelschnitt sich ergiebt.

Die Punkte S sind eindeutig bestimmt; denn $S_{12,5}$, $S_{45,2}$ enthalten als Doppelindices je einen der nicht doppelt vorhandenen Doppelindices der Punkte R, als einfache Indices je eine Zahl des gemeinsamen Doppelindex der ersten Colonne, welche wieder wie in den letzten beiden Art. zu verteilen sind, und $S_{36,2}, S_{36,5}$ enthalten die den Doppelindices der beiden ersten S fehlenden Zahlen 3 und 6 im Doppelindex und dieselben einfachen Indices.

Es bleibt somit nur noch zu bestimmen, wie oft wir 4 Punkte R so zusammenstellen können, dass sie wie bei unserm Kegelschnitte zeilen- und colonnenweise die Doppelindices gemein haben.

Bilden wir nach $R_{13,25}, R_{25,46}$ die drei Gruppen von Zahlen:

I: 1 und 3,
II: 2 und 5,
III: 4 und 6,

so finden wir, dass ein Doppelindex von $R_{13,45}$ aus Zahlen in I, der andere aus solchen in II und III besteht. Ebenso gebildet sind: $R_{13,56}, R_{13,24}, R_{13,26}$.

Ein Doppelindex von $R_{12,46}$ enthält Zahlen aus I und II, der andere die in III. Demselben Gesetze entsprechen: $R_{23,46}$, $R_{15,46}, R_{35,46}$.

Wie das Paar $R_{13,45}, R_{12,46}$, kann ich offenbar auch das Paar $R_{13,45}, R_{23,46}$ zu $R_{13,25}, R_{25,46}$ hinzufügen; denn jedesmal ist die Art der Gemeinschaft der Doppelindices sowohl dieselbe, als auch lassen sich die 4 Punkte S auf dieselbe obige Weise bilden. Diese Bildung ist nicht mehr möglich, wenn wir $R_{13,45}$ z. B. mit $R_{15,46}$ paaren und zu $R_{13,25}, R_{25,46}$ hinzufügen. In diesem Falle haben die nicht gemeinsamen Doppelindices der 4 R eine Zahl, in unserm Falle 5, gemein, was die Bildung des Paares S mit gemeinsamen Doppelindex unmöglich macht.

Ebenso kann man $R_{13,45}$ nicht mit $R_{35,46}$ paaren.

Das Resultat ist also, dass man zu $R_{13,25}, R_{25,46}$ viermal je einen Punkt der ersten Art hinzufügen kann, und dass sich dann von der zweiten Art noch zwei Punkte einzeln hinzufügen lassen. Das Paar $R_{13,25}, R_{25,46}$ liefert also 4. 2 Kegelschnitte und da es nach den beiden letzten Art. 45 ebenso gebildete Paare giebt, so erhalten wir:

$$45.4.2 = 360$$

Kegelschnitte.

Mit der Aufstellung dieser Kegelschnitte ist auch die letzte von Steiners Behauptungen: „Die 120 Punkte, 45 R + 15 T + 60 S, liegen 900 mal zu je acht auf irgend einem Kegelschnitte, wobei

die jedesmaligen 8 Punkte von allen 6 gegebenen Punkten abhängen," als richtig bewiesen, da die Summe der in den letzten drei Art. gefundenen Zahlen: $180 + 360 + 360 = 900$ ist.

Zu den angestellten Betrachtungen bestehen selbstverständlich duale. Diese hier einzeln anzugeben, würde zu weit führen. Man braucht in der Abhandlung immer nur zu setzen, statt der kleinen resp. grossen Buchstaben die entsprechenden grossen resp. kleinen und für:

Punkt, Gerade	Gerade, Punkt
Fundamentalpunkt	Fundamentalgerade
Seite	Ecke
Fünfeck, Sechseck	Fünfseit, Sechsseit
Tangente	Berührungspunkt
es liegen auf etc.	es schneiden sich etc.

und man wird das Duale haben.

Berichtigungen.

S. 26 Z. 18 v. oben lies: Nun statt Mun etc.
S. 26 Z. 16 v. unten lies: die andere Zahl aus I. etc.
S. 33 Z. 5 v. unten lies: von denen je einer etc.
S. 34 Z. 12 v. oben lies: und $S_{12,4}\,S_{34,2}$ etc.
S. 34 Z. 14 v. unten lies: $S_{12,3}\,S_{13,2}$ etc.
S. 37 Z. 18 v. oben lies: $R_{12,34}, R_{12,56}, R_{13,46}, R_{25,46}, S_{13,5}, S_{25,3}, S_{34,5}$